# Reihen

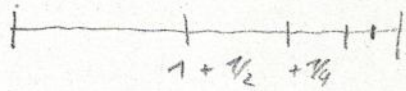
Man sagt

$\sum_{k=s}^{\infty} a_k$ ↗ Konvergiert, falls $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=s}^{n} a_n$ existiert

$s \in \mathbb{N}$ sonst ist $\sum_{k=s}^{\infty} a_k$ divergent.

Bsp:

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$
$= \frac{1}{1-1/2}$




Allgemein: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $q \neq 1$

Also: $|q|<1 \Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}}$ (~~harmonische Reihe~~) geometrische Reihe

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ div., $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ Konv

Allgemein: $\sum \frac{1}{k^s}$, $s>0$ ist $\begin{cases} \text{konvergent} & s>1 \\ \text{diverg.} & s\leq 1 \end{cases}$

---

Konvergenzkriterien:

(i) $\sum a_k$ konv. $\Rightarrow$ $a_k \to 0$ $(k\to\infty)$

Also $a_k \not\to 0 \Rightarrow \sum a_k$ div. z.B. $\sum_{k=0}^{\infty} 1$ div. $(1 \not\to 0)$; $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$ div. $(2^k \not\to 0)$

(ii) $|a_k| < b_k$ und $\sum b_k$ konv. $\Rightarrow \sum a_k$ konv. (Majorantenkrit)

Bsp. $\frac{1}{k^2+5k+1} < \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+5k+1}$ konvergiert, da $\sum \frac{1}{k^2}$ konv.

(iii) $0 \leq b_k \leq a_k$ und $\sum b_k$ div. $\Rightarrow \sum a_k$ div. (Minorantenkrit.)

Bsp. $\frac{1}{k-5} \geq \frac{1}{k}$, $k \geq 6 \Rightarrow \sum_{k=6}^{\infty} \frac{1}{k-5}$ div., da $\sum_{k=6}^{\infty} \frac{1}{k}$ div.