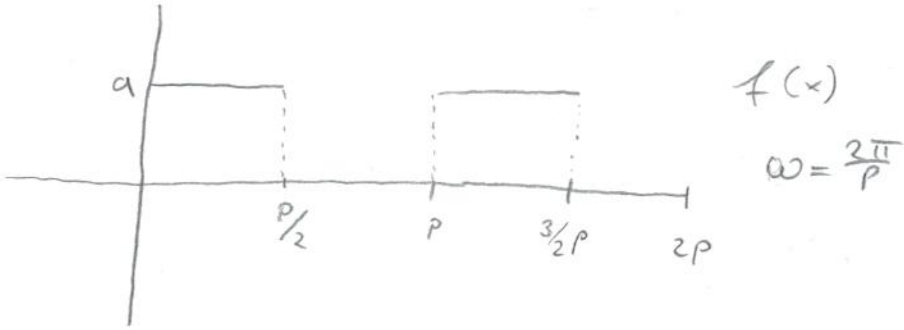
A3

(a)



mittlere Leistung von f:

$$P(f) = \frac{1}{P} \cdot \int_0^P f^2(x)\,dx = \frac{1}{P}\int_0^{P/2} a^2\,dx = \frac{1}{P}\cdot\frac{P}{2}\cdot a^2$$
$$= \frac{a^2}{2}$$

Bem: Ist $s_k(x) = a_k \cdot \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$, $\underbrace{}_{k \geq 1}$ so ist

$$P(s_k) = \frac{1}{P}\cdot \int_0^P a_k^2 \cdot \cos^2(k\omega x) + b_k^2 \sin^2(k\omega x) + a_k b_k \cos(k\omega x)\sin(k\omega x)\,dx$$

Wegen $\int \cos^2(k\omega x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{\cos(k\omega x)\sin(k\omega x)}{k\omega}$

$$\int \sin^2(k\omega x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos(k\omega x)\sin(k\omega x)}{k\omega}$$

$$\int \cos(k\omega x)\sin(k\omega x)\,dx = \frac{1}{2k\omega}\sin^2(k\omega x)$$

folgt

$$P(s_k) = \frac{1}{P}\cdot a_k^2 \cdot \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{\cos(k\omega x)\sin(k\omega x)}{k\omega}\right]_0^P$$

$$+ \frac{1}{P}\cdot b_k^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos(k\omega x)\sin(k\omega x)}{k\omega}\right]_0^P$$

$$+ \frac{1}{P}\cdot\frac{a_k b_k}{2k\omega}\underbrace{\left[\sin^2(k\omega x)\right]_0^P}_{= \sin^2\left(k\cdot\frac{2\pi}{P}\cdot P\right) - \sin(0) = 0}$$

Also

$$p(s_k) = \frac{1}{p} \cdot a_k^2 \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2} \cos(k\omega p) \cdot \underbrace{\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{p} \cdot p\right)}_{=0} \right)$$

$$+ \frac{1}{p} \cdot b_k^2 \left(\frac{p}{2} - \frac{1}{2} \cos(k\omega) \underbrace{\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{p} \cdot p\right)}_{=0} \right) = \frac{1}{p} \cdot \frac{p}{2} \cdot \left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot A_k^2}}$$

Für $s_0 = \frac{a_0}{2}$ gilt außerdem

$$P(s_0) = \frac{1}{p} \cdot \int_0^p \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 = \frac{a_0^2}{4} = A_0^2$$

Ist $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos(k\omega x) + b_k \cdot \sin(k\omega x) = \sum_{k \geq 0} s_k(x)$

eine Fourierreihe, so gilt nach dem Parsevalschen Theorem:

$$P(f) = \sum_{k \geq 0} P(s_k) = A_0^2 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2} A_k^2 \qquad (1)$$

D.h. die mittlere Leistung eines Signals entspricht der Summe der mittleren Leistungen der Fourier Komponenten.

(b) $f(x) = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \cdot \sin((2k+1)\omega x) = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi} \sin(\omega x) + \frac{2a}{3\pi} \sin(3\omega x) + \frac{2a}{5\pi} \sin(5\omega x) + \ldots$

Also

$$A_0 = \frac{a}{2}, \quad A_k = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{2a}{k\pi} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

und damit

$$P(s_0) = A_0^2 = \frac{a^2}{4}, \quad P(s_k) = A_k^2/2 = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{2a^2}{k^2\pi^2} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

(c) + (d) Wegen Gl. (1) ist

$$P(f) = \frac{a^2}{2} = \sum_{k\geq 0} P(s_k) = A_0^2 + \frac{1}{2}A_1^2 + \frac{1}{2}A_2^2 + \frac{1}{2}A_3^2$$

$$= \underbrace{\frac{a^2}{4}}_{=P(s_0)} + \underbrace{\frac{2a^2}{\pi^2}}_{=P(s_1)} + 0 + \underbrace{\frac{2a^2}{9\pi^2}}_{=P(s_3)} + 0 + \underbrace{\frac{2a^2}{25\pi^2}}_{=P(s_5)} + \dots$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{9\pi^2} + \dots \right)$$

Es ist $\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{9\pi^2} \approx 0{,}9503$.

Also $P(s_0) + P(s_1) + P(s_3) \approx 0{,}95 \cdot \frac{a^2}{2} = 0{,}95 \cdot P(f)$

Wir brauchen somit $s_0, s_1, \overset{=0}{s_2}, s_3$ für 95 % der mittleren Leistung des Signals