Wie merke ich mir die Additionstheoreme?

Sinus und Kosinus

Es gilt bekanntlich (Eulersche Formel):

$$e^{i\cdot x} = \cos(x) + i \cdot \sin(x).$$

Also $\mathrm{Re}(e^{i\cdot x}) = \cos(x)$ und $\mathrm{Im}(e^{i\cdot x}) = \cos(x)$. Somit bekommen wir:

$$\begin{aligned}
(\cos(\alpha+\beta) + i \cdot \sin(\alpha+\beta)) &= e^{i\cdot(\alpha+\beta)} = e^{i\,\alpha} \cdot e^{i\,\beta} \\
&= (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta)) \\
&= (\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) \\
&\qquad\qquad + i \cdot (\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)).
\end{aligned}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert:

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \\
\sin(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta).
\end{aligned}}$$

Andere Formeln können hieraus hergeleitet werden. So folgt sofort:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\underbrace{\cos(-\beta)}_{\cos(\beta)} - \sin(\alpha)\underbrace{\sin(-\beta)}_{-\sin(\beta)} \\
&= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta).
\end{aligned}$$

Oder auch:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha).$$

Und somit:

$$\boxed{\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2\alpha).}$$

Interessant ist auch folgende Umformung:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cdot \cos(\alpha)\cos(\beta).$$

Damit gilt dann für folgende Stammfunktion, falls $\alpha \neq \pm\beta$:

$$\begin{aligned}
\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \cos((\alpha+\beta)x) + \cos((\alpha-\beta)x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\sin((\alpha+\beta)x) + \frac{1}{\alpha-\beta}\sin((\alpha-\beta)x)\right).
\end{aligned}$$

Analog findet man Stammfunktionen von $\sin(\alpha x)\sin(\beta x)$ und $\sin(\alpha x)\cos(\beta x)$.

Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus

Per Definition sind $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ der gerade bzw. ungerade Teil von e^x. Das heißt:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Also $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$ und $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\cosh(\alpha+\beta) + \sinh(\alpha+\beta) = e^{\alpha+\beta} = e^\alpha \cdot e^\beta &= (\cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)) \cdot (\cosh(\beta) + \sinh(\beta)) \\ &= \cosh(\alpha)\cosh(\beta) + \sinh(\alpha)\sinh(\beta) \\ &\qquad + \cosh(\alpha)\sinh(\beta) + \sinh(\alpha)\cosh(\beta).\end{aligned}$$

Betrachte ich die linke Seite und rechte Seite jeweils als Funktion in zwei Variablen α, β so folgt durch Vergleich der (eindeutigen) geraden und ungeraden Teile:

$$\boxed{\begin{aligned}\cosh(\alpha+\beta) &= \cosh(\alpha)\cosh(\beta) + \sinh(\alpha)\sinh(\beta), \\ \sinh(\alpha+\beta) &= \cosh(\alpha)\sinh(\beta) + \sinh(\alpha)\cosh(\beta).\end{aligned}}$$