S.4.1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

LGS
$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 x_3 = 1$$
$$1 \cdot x_1 + 5 x_2 + 3 x_3 = 0$$

$\Downarrow$

Matrix
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

2×3 Matrix

Matrix-Operationen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Addition
$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 \\ 3+1 & 4+0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$A - B$ analog

$\cancel{A + C}$ geht nicht !!

Multiplikation mit Skalar

$$5 \cdot C = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 0 & 5\cdot 2 \\ 5\cdot 0 & 5\cdot 3 & 5\cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 2 \cdot 0$$

Multiplikation

$$A \cdot C = \begin{pmatrix}1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

„lege Zeile auf Spalte"

$$= \begin{pmatrix}1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 0 & 3\cdot 0 + 4\cdot 3 & 3\cdot 2 + 4\cdot 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 6 & 4 \\ 3 & 12 & 10\end{pmatrix}$$

$$\cancel{C \cdot A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix}}$$ geht nicht!

Wenn es geht muss nicht dasselbe sein

$$A \cdot B = \begin{pmatrix}1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 \\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen:

① $N = \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$ Nullmatrix

② $E = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}}_{n} \Big\} n$ Einheitsmatrix

$$A \cdot E = A$$

③ $A = \begin{pmatrix}a_1 & * & * & \cdots \\ 0 & a_2 & * & \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ & & & \end{pmatrix}$ Zeilenstufenform

Determinanten

A $n \times n$ - Matrix. Dann

$\underset{\in \mathbb{R}}{\det A}$ nützliches Hilfsmittel bei Lösung von LGS

Bsp: ① $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3$

2×2 Matrix $\qquad = 2 - 12 = -10$

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3×3 Matrix

Regel von Sarrus

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 5 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot 7 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 \cdot 0 \\ &\quad - (-2) \cdot (3) \cdot 7 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 0 \\ &= 7 + 42 = \underline{\underline{49}} \end{aligned}$$

③ $n \times n$ - Matrix siehe Entwicklungssatz von Laplace

LGS

Bsp:

(1)
$$\begin{aligned} -x + y + z &= 0 \\ x - 3y - 2z &= 5 \\ 5\cdot x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

↑ = 0 überall homogenes GlS

Zum Lösen bringe in ZSF

mit Gauß-Algorithmus

Erlaubt Zeilen umformungen

und Zeilen ~~??~~ Tauschen

$\rightsquigarrow$ Ersetze 2. Zeile durch 1+2. Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \quad III + 5\cdot I$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \end{array}\right) \quad III + 3\cdot II$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_2 - x_3 &= 5 \\ 6\cdot x_3 &= 18 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_3 = \frac{18}{6} = \underline{3}$ in II $\quad -2x_2 - 3 = 5 \quad | +3$

$$\Leftrightarrow \quad -2x_2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2 = \underline{\underline{-4}}$$

in I $\quad -x_1 + (-4) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -x_1 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = -1}}$

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Probe: $\quad -(-1) + (-4) + 3 = 0 \quad \checkmark$

$-1 - 3\cdot(-4) - 2\cdot 3 = 11 - 6 = 5 \quad \checkmark$

$5\cdot(-1) + (-4) + 4\cdot 3 = -9 + 12 = 3 \quad \checkmark$

oder $\quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Matrixmult.

(2)

$x_1 + 2x_2 = 3$

$3x_1 + 6x_2 = 4$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{array}\right) \underset{II-3I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \quad x_1 + 2x_2 = 3$

$\qquad 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = -5$

$\Leftrightarrow$ keine Lösung

$\mathbb{L} = \{\}$

(3)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 3\cdot x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad III - 2II$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow 1\cdot x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = \underline{\underline{2}}$$

$$x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_3 + 2 = 0 \Rightarrow x_3 = -2$$

$$x_1 + 2x_2 + 2\cdot(-2) + 2 = 1$$

Wähle x_2 "r" beliebig.

$$x_1 + 2\cdot r - 4 + 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1 + 2 - 2r = \underline{\underline{3 - 2r}}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3-2r \\ r \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \, r \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, r \in \mathbb{R} \right\}$$

Probe
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

wähle beliebig

Allg.
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \underline{a_1} & \overset{\downarrow}{*} & * & & & & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 & & & & b_2 \\ & & & a_3 & \underbrace{* \quad * \quad *}_{\text{wähle beliebig}} & & b_3 \end{array}\right)$$

$a_1, a_2, a_3 \neq 0$

Satz für quadratisches LGS

$$n \text{ Zeilen} \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} x_1 + \ldots & & a_{1n} x_n & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} x_1 + \ldots & & a_{nn} x_n & b_n \end{array}\right) \right.$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n \text{ Spalten}}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\det A \neq 0$ LGS hat genau eine Lsg.

$\det A = 0 \iff A$ ist singulär

$\iff$ LGS hat keine oder ∞-viele Lsg.

(bei homog. LGS ∞-viele Lsg)

Inverse Matrix

A quadratische, $\det A \neq 0$

Dann ex. Inverse A^{-1} von A mit $A^{-1}A = E$

Bsp:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)^{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

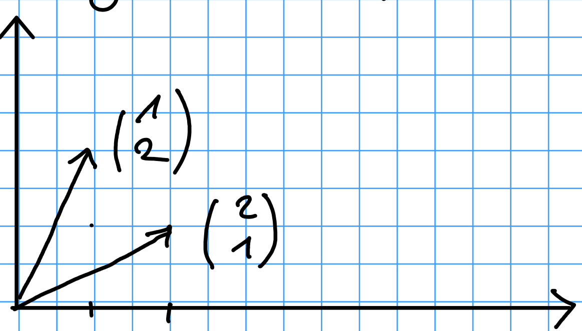
Probe $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

S.4.2 Vektorrechnung und analytische Geometrie

Vektoren: Vektoren sind $n \times 1$ Matrizen

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Falls ein KS gegeben ist haben wir folgende Anschauung eines Vektors als Pfeil.



Wichtig ist nur Länge und Richtung nicht Startpunkt

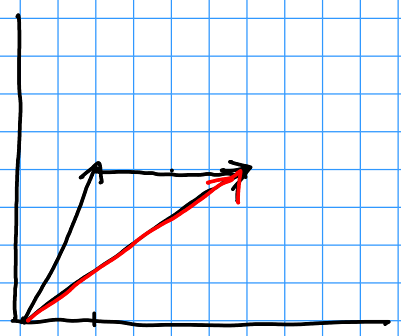
Schreibweise

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 1, 2 sind Koordinaten des Vektors

<u>Vektoroperationen</u> wie bei Matrizen

<u>Skalierung:</u> $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Skalar}}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

<u>Addition</u> $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \\ 2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

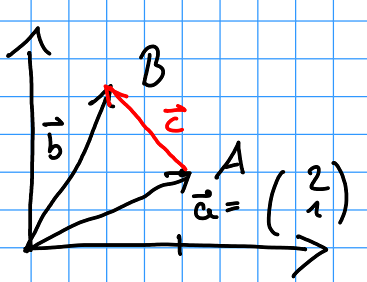


<u>Betrag</u> $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2}$

ist Länge des Vektors

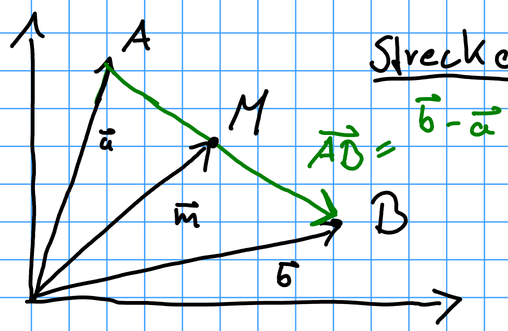
<u>Punkte<->Vektoren</u>

Punkte im Raum, Fläche sind gegeben durch Ortsvektoren im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$



Verschiebung $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{c}$

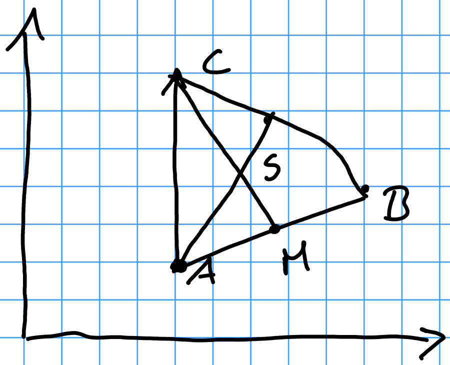
Erste Anwendungen



Streckenmittelpunkt

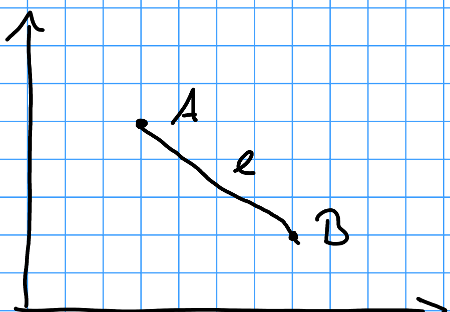
$$\vec m = \vec a + \frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$$
$$= \vec a + \frac{1}{2}\left(\vec b - \vec a\right)$$
$$= \vec a + \frac{1}{2}\vec b - \frac{1}{2}\vec a$$
$$= \frac{1}{2}\vec a + \frac{1}{2}\vec b = \frac{1}{2}\left(\vec a + \vec b\right)$$

Schwerpunkt im Dreieck



$$\vec s = \vec m + \frac{1}{3}\vec{MC}$$
$$= \vec m + \frac{1}{3}\left(\vec c - \vec m\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\vec a + \vec b\right) + \frac{1}{3}\left(\vec c - \left(\frac{1}{2}(\vec a + \vec b)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\vec a + \frac{1}{2}\vec b + \frac{1}{3}\vec c - \frac{1}{6}\vec a - \frac{1}{6}\vec b$$
$$= \frac{1}{3}\left(\vec a + \vec b + \vec c\right)$$

Abstand



$$\ell = |\vec{AB}| = |\vec b - \vec a|$$

Bsp: $\vec a = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\vec b = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

$$\ell = |\vec b - \vec a|$$
$$= \left|\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Das Skalarprodukt

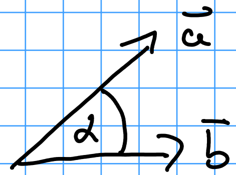
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3$$

$$= 0 + 2 + 3$$

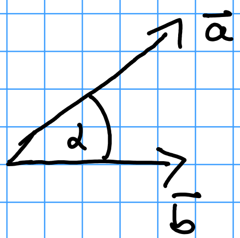
$$= 5 \quad \text{ist Skalar}$$

im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

Bsp: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\alpha = \pi/4 \mathrel{\hat{=}} 45°$

$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|\vec{b}| = 1$

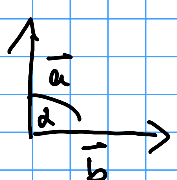
$|\vec{a}| = \sqrt{1+1}$

$= \sqrt{2}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad ✓$$

Orthogonale Vektoren

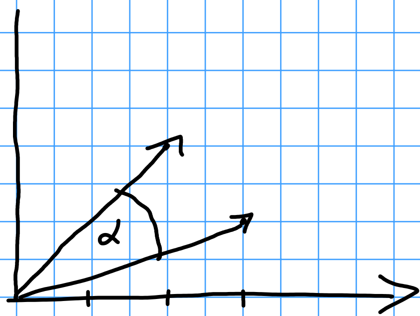


$\alpha = \pi/2 \mathrel{\hat{=}} 90°$ $\quad$ Dann $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$\iff \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha) = 0$$
weil $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Winkelberechnung Bsp:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 2 + 2\cdot 1 = 8 \overset{!}{=} |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha)$$
$$= \sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2}\cdot\cos(\alpha)$$
$$\iff \quad 8 = \sqrt{10}\cdot\sqrt{8}\cdot\cos(\alpha)$$
$$\iff \quad \cos(\alpha) = \frac{8}{\sqrt{80}} = \frac{8}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{20}} = \frac{8}{2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}$$
$$= \frac{8}{4\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\underset{TR}{\Longrightarrow} \quad \alpha \approx \underline{\underline{26{,}57^\circ}}$$

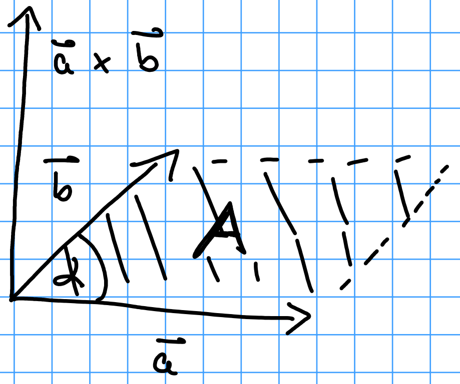
Das Kreuzprodukt

nur in $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} = \vec{b}$$
$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 2 - 5\cdot 1\\ 1\cdot 1 - 2\cdot 2\\ 2\cdot 5 - 1\cdot 1\end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\9\end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix}2 & & 1\\1 & & 5\\1 & & 2\\2 & & 1\\1 & & 5\end{matrix}$$



Flächeninhalt A

Eigenschaften:

① $\vec a \times \vec b \perp a$

$\vec a \times \vec b \perp b$

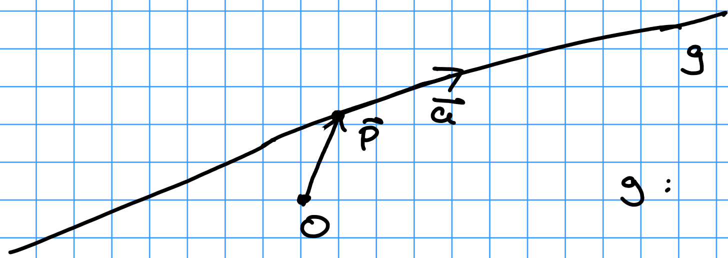
rechte Hand Regel
$\vec a$ Daumen
$\vec b$ Zeigefinger
$\vec a \times \vec b$ Mittelfinger

② $|\vec a \times \vec b| = |\vec a| \cdot |\vec b| \cdot \sin(\alpha) = A$

③ $\vec b \times \vec a = - \vec a \times \vec b$

Weitere Anwendungen

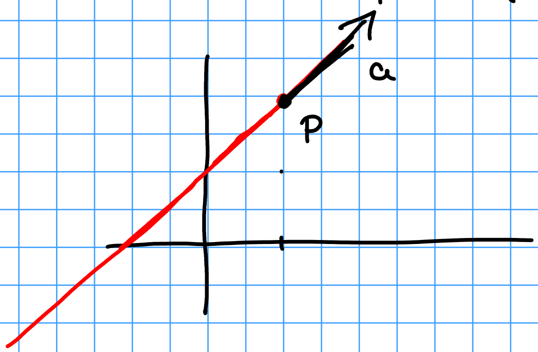
① Geraden def.



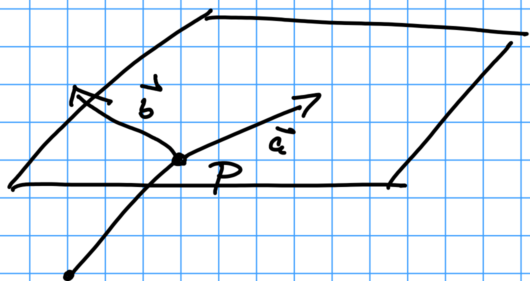
$g: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{a}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

z.B. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



② Ebenen def.

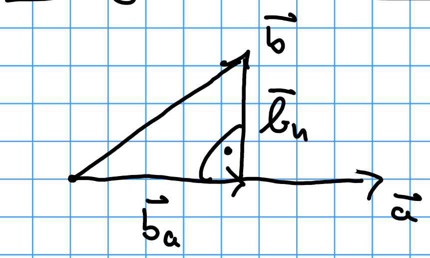


$E: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ebene in Höhe 2

orthogonale Projektion



$$\vec{b}_n \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{b}_n \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{b} = \vec{b}_a + \vec{b}_n$$

$$\vec{b}_a = \lambda \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot (\vec{b}_a + \vec{b}_n) = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{a} + \vec{b}_n)$$

$$= \lambda \cdot \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{a})}_{|\vec{a}|^2} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}_n}_{=0} = \lambda \cdot |\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \qquad \Rightarrow \vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

Abstände

$\vec{Q}$ zu $g: \vec{x} = p + \lambda \vec{a}$

①

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{q} - \vec{p})|}{|\vec{a}|}$$

② Abstand Q zu $E: \vec{x} = p + \lambda \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

$$d = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{q} - \vec{p})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$