Kurs 2

S.2.1 Logarithmen, Gleichungen und Funktionen

Logarithmen

$a > 0,\ b > 0,\quad a \neq 1$

$a^x = b \iff x = \log_a b \quad (\text{klar } 1^x = 1)$

Bsp:

$2^3 = 8 \Rightarrow \log_2 8 = 3$

$2^{\log_2 8} = 8$, $\quad 2^{\log_2 8} = 2^3$

$10^3 = 1000 \Rightarrow \log_{10} 1000 = 3$

$16^{1/2} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow \log_{16} 4 = 1/2$

Sonderfälle Für alle $a > 0,\ a \neq 1$

$\log_a a = 1 \iff a^1 = a$

$\log_a 1 = 0 \iff a^0 = 1$

$b > 0 \qquad a^{\log_a b} = b$

$x = \log_a b \iff a^{x} = b$

Rechenregeln $a > 0,\ a \neq 1,\quad u, v > 0,\quad k \in \mathbb{R}$

$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \iff a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $\quad a^x = u,\ a^y = v$

$\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v \iff \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\log_a (u^k) = k \cdot \log_a u \iff (a^x)^k = a^{x \cdot k}$

$\log_a \left(\frac{1}{u}\right) = \log_a (u^{-1}) = -\log_a (u)$

Beispiele

- $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \cdot \underbrace{\log_2 2}_{=1} = 3$
- $\log_{10} 10000 = \log_{10} 10^4 = 4 \cdot \log_{10} 10 = 4$
- $\log_{10} 0{,}003 = \log_{10} \frac{3}{1000} = \log_{10} 3 - \log_{10} 1000$
  $= \log_{10} 3 - 3$
  $\approx 0{,}47712 - 3$
  $\approx -2{,}522$

- $\log_a \frac{u^2 v^3}{w^5 \cdot a^6} = \log_a u^2 v^3 - \log_a w^5 \cdot a^6$
  $= \log_a u^2 + \log_a v^3 - (\log_a w^5 + \underbrace{\log_a a^6}_{=6})$
  $= \underline{2 \cdot \log_a u + 3 \cdot \log_a v - 5 \log_a w - 6}$

spezielle Basen

- $\log_{10} b = \lg b$ (Zehnerlogarithmus)
- $\log_e b = \ln b$ (natürlicher Logarithmus)

$e \approx 2{,}7$ eulersche Zahl

$$e := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Berechnung für beliebige Basen:

$a^x = b$ (TR hat nur ln oder lg)

gesucht $x = \log_a b$

$\Leftrightarrow \ln a^x = \ln(b)$

$\Leftrightarrow x \cdot \ln a = \ln(b)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

Also $\boxed{\log_a b = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}}$

Beispiel

$$2^x = 300 \quad | \ln$$
$$\iff \ln 2^x = \ln 300$$
$$\iff x \cdot \ln 2 = \ln 300$$
$$\iff x = \frac{\ln 300}{\ln 2} \approx 8{,}23$$

Reelle Funktionen

Eine reelle Funktion $f: D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}$

ist eine Zuordnung, bei der jede Zahl $x \in D_f$ genau eine Zahl $y = f(x)$ zugeordnet ist.

D_f heißt Definitionsbereich von f

$W_f = \{ f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \}$ heißt Wertebereich von f

Beispiele

① $f: \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$

mit $1 \mapsto 5$, $2 \mapsto 6$, $3 \mapsto 7$

Schreibe $f(1) = 5$, $f(2) = 6$, $f(3) = 7$

$W_f = \{5, 6, 7\}$

② $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $g(x) = x^2$

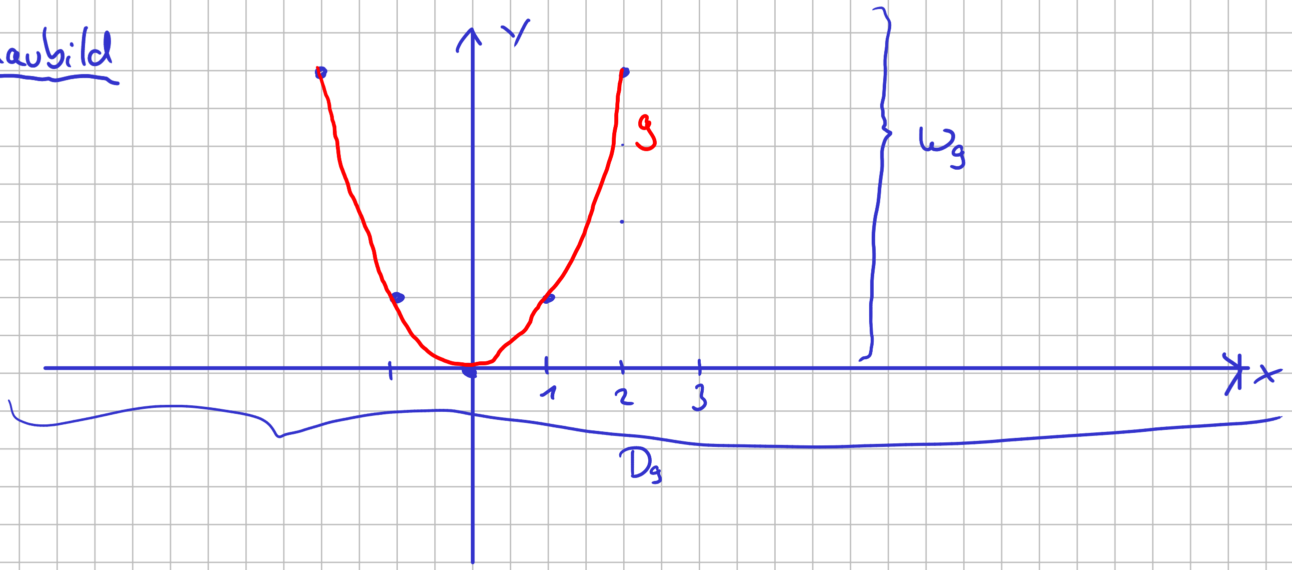
$x \mapsto x^2$

z.B. $g(2) = 4$, $g(3) = 9$, $g(0) = 0$, ...

$g(-2) = 4$

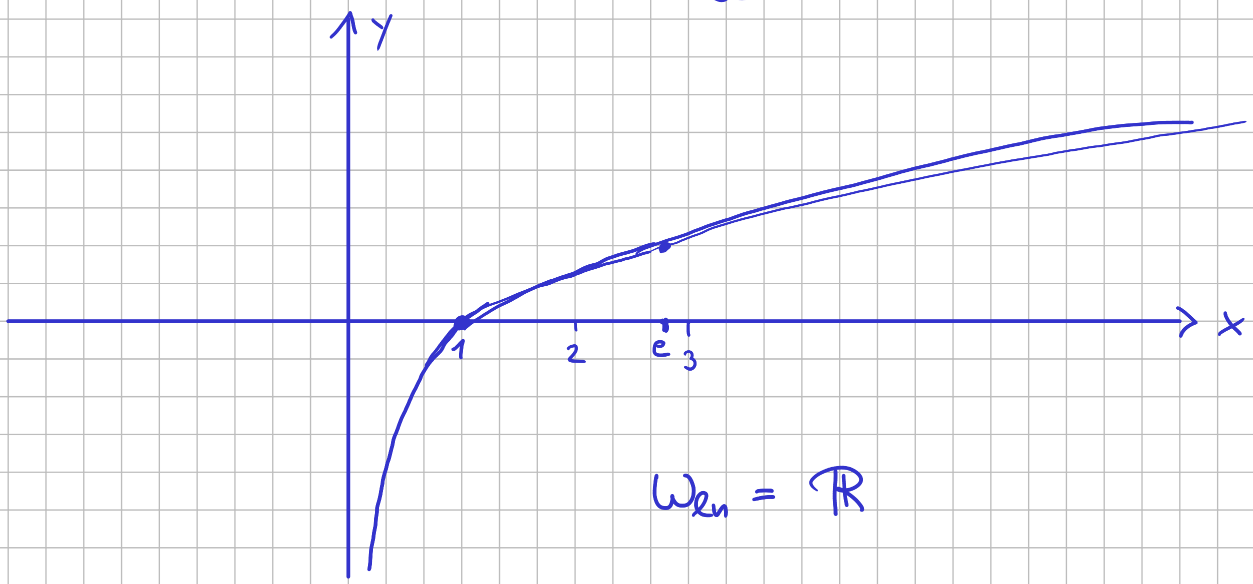
$W_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \} = [0, \infty)$

Schaubild



③ $\ln : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

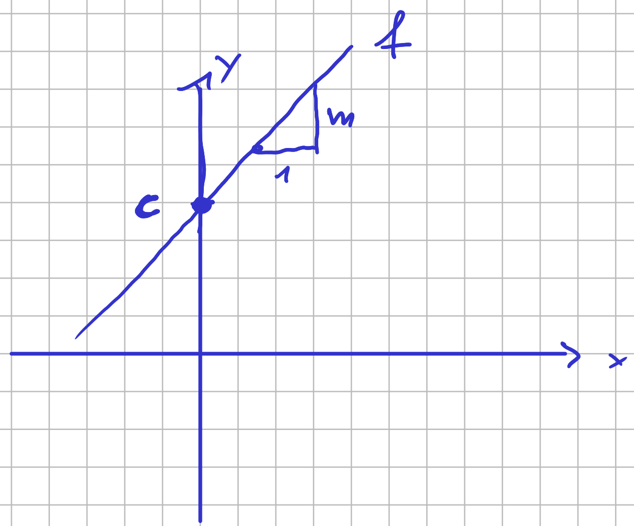
$x \mapsto \log_e x$



④ Lineare Funktionen

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto mx + c$

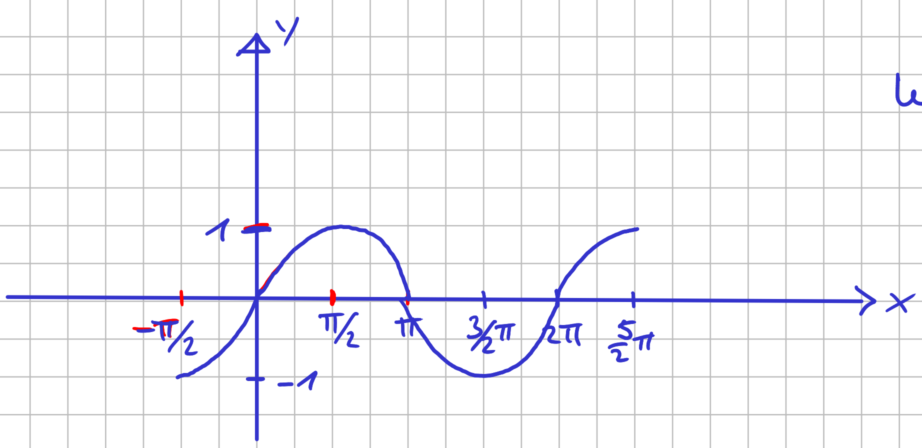


$D_f = \mathbb{R}$

$W_f = \begin{cases} \mathbb{R} & m \neq 0 \\ \{c\} & m = 0 \end{cases}$

(5) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

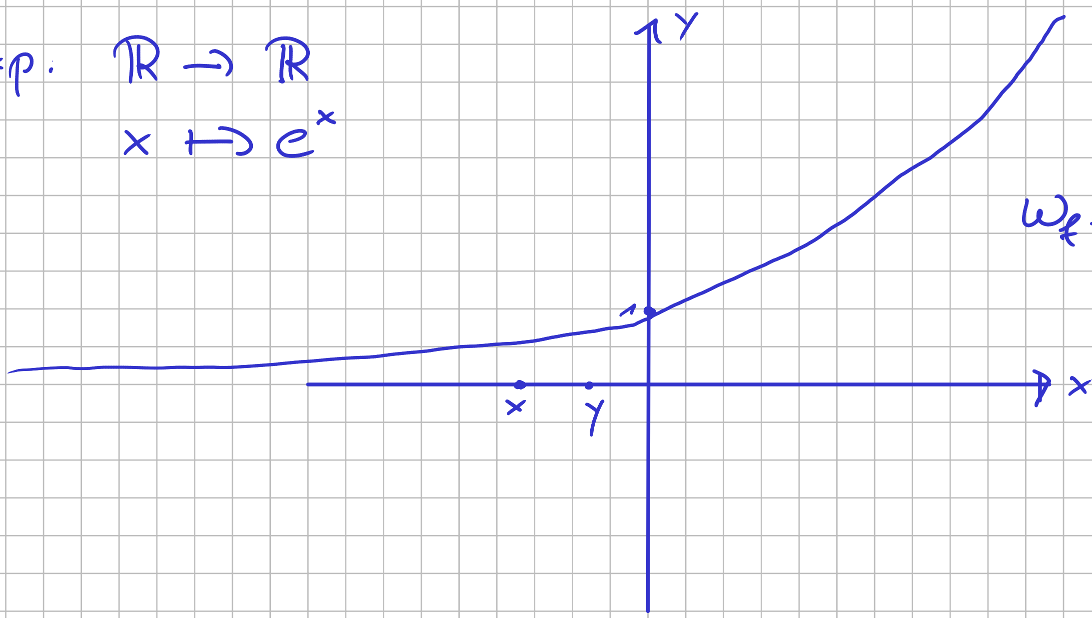
$x \mapsto \sin(x)$



$W_f = [-1, 1]$

(6) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto e^x$



$W_f = (0, \infty)$

(6) Gebrochenrationale Funktionen

$f : D_f \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{Z(x)}{N(x)}$ wobei $Z(x)$, $N(x)$ Polynome

$Z(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0$

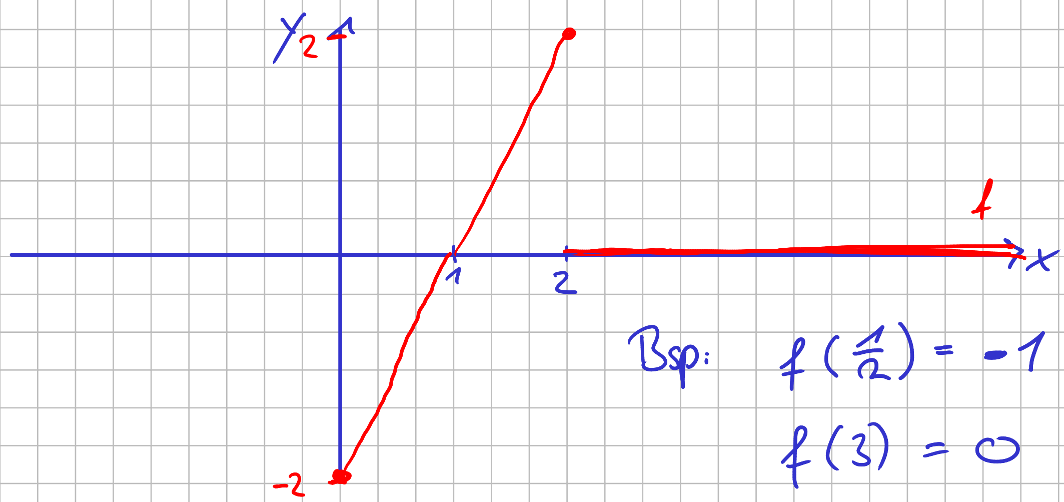
$N(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} x^{n-1} + \dots + b_0$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid N(x) = 0\}$

Bsp: $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 1}$ Hier $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

7 stückweise def. Funktionen

$$f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 2x-2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$$



$W_f = [-2,2]$

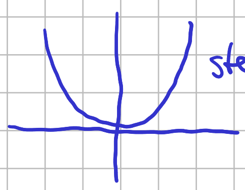
Bsp: $f(\frac{1}{2}) = -1$

$f(3) = 0$

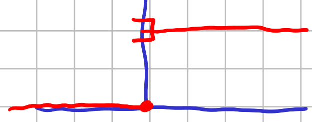
Eigenschaften von Funktionen

- monoton steigend (fallend) $\quad x,y \in D_f \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ $(\geq)$

- stetig $\Leftrightarrow$ „keine Sprünge"



stetig



nicht stetig

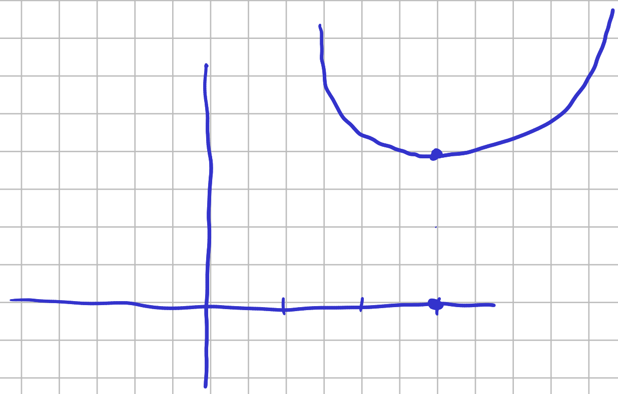
- nach oben (unten) beschränkt $\quad$ Es ex. $M \in \mathbb{R}$ $\quad y \leq M$ $(\geq)$, $y \in W_f$

Funktionstransformationen

$\overbrace{\text{Verschiebung}}^{\text{um } a}$ nach rechts (links) $\qquad g(x) = f(x \underset{(+)}{-} a)$

" " oben (unten) $\qquad g(x) = f(x) \underset{(-)}{+} a$

Bsp: $\qquad f(x) = (x-3)^2 + 2$



Gleichungen

Ausdruck der Form

$$f(x) = g(x) \qquad \text{heißt Gleichung}$$

mit Def. bereich $\mathbb{D} \quad D_f \cap D_g$

mit Lösungsmenge $\quad \mathbb{L} = \{ x \in \mathbb{D} \mid f(x) = g(x) \}$

Beispiel: quadratische Gleichung

1 $\qquad x^2 + 1 = 2x \quad | -2x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Longleftrightarrow \quad x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{2 \pm 0}{2} = 1$

$\mathbb{L} = \{1\}$ $\qquad$ Allgemein $\quad ax^2 + bx + c = 0$

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

Äquivalenzumformungen: Umformungen einer Gleichung bei der sich die Lösungsmenge und Definitionsbereich nicht ändert

Bsp: $3x - 2 = 5 \quad | +2 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3x = 5+2 = 7 \quad | \cdot \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \qquad \mathbb{L} = \{\frac{7}{3}\}$

Gegenbsp:

1. $x = 2 \quad |(\,)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4$

$\mathbb{L} = \{2\} \qquad \mathbb{L} = \{\pm 2\}$ Keine Äquivalenzumformung

2. $\sqrt{4x+9} = x+1 \quad |(\,)^2$

$\Big(4x+9 \geq 0 \quad | -9 \qquad \mathbb{D} = [-\frac{9}{4}, \infty)$

$4x \geq -9 \quad | \cdot \frac{1}{4}$

$x \geq -\frac{9}{4} \Big)$

$\Rightarrow 4x+9 = (x+1)^2$

$\Leftrightarrow 4x+9 = x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 2x - 8$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2}$

$= \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2}$

$= \frac{2 \pm 6}{2} = 1 \pm 3$

$= -2, 4$

$\mathbb{L} = \{4\}$

Probe

$x = 4 \qquad \sqrt{4 \cdot 4 + 9} = 4 + 1$

$\sqrt{25} = 5$ ✓

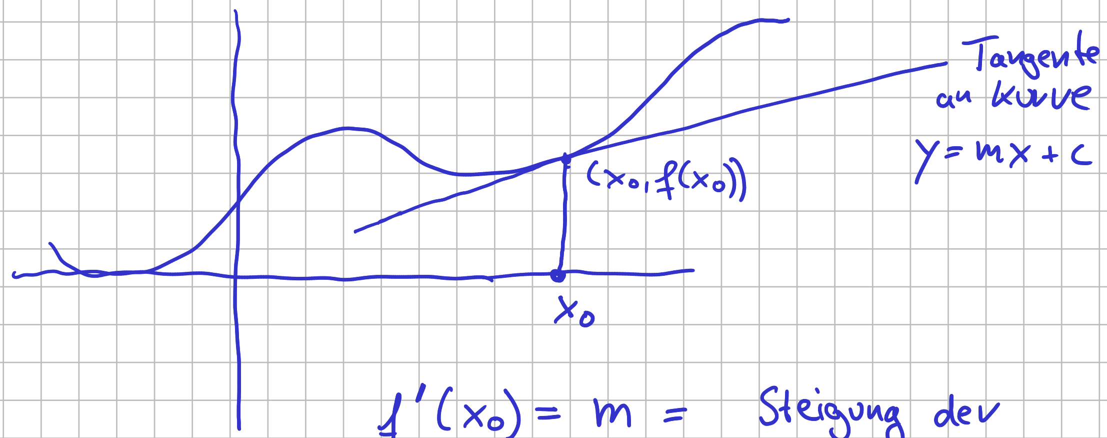
$x = -2 \quad \notin$

$\sqrt{-2 \cdot 4 + 9} = -2 + 1$

$\sqrt{1} = -1 \quad \lightning$

S3.2 Differentialrechnung

Gegeben $f: D_f \to \mathbb{R}$



$f'(x_0) = m =$ Steigung der Tangente an die Kurve in x_0

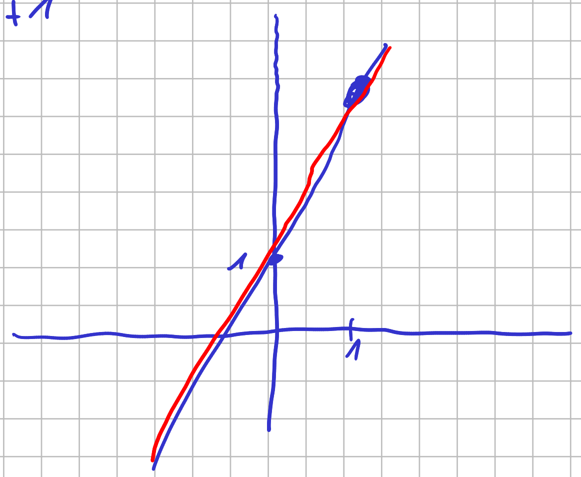
$\frac{d}{dx} f(x_0)$

Beispiel

1

$f(x) = 2x+1$

$f'(x) = 2$



Standardfkt

$n \neq 0 \quad n \in \mathbb{R}$

$f(x)$	$f'(x)$
c	0

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

zB $\frac{d}{dx} x^3 = 3 \cdot x^2$

zB $\frac{d}{dx} x^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}$

$= \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Linearität

f Funktion

$$(a \cdot f)' = a \cdot f'$$

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$$

z.B. $(3 \cdot x^5)' = 3 \cdot (x^5)'$
$= 3 \cdot 5 \cdot x^4$
$= 15 \cdot x^4$

z.B $(3 \cdot x^5 + 2 \cdot x^4)'$
$= (3 \cdot x^5)' + (2 \cdot x^4)'$
$= 15 \cdot x^4 + 8 \cdot x^3$

Mehrfache Ableitung

f Funktion

$$f', \; f'' = (f')', \; f''' = (f'')' \; \dots \; f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Produktregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Bsp: $(x^2 \cdot \cos(x))' = \overset{f'}{(2x)} \cdot \overset{g}{\cos(x)} + \overset{f}{x^2} \cdot (-\sin(x))$
$= 2x\cos(x) - x^2 \sin(x)$

Kettenregel

z.B $(\cos(2x+3))' = ?$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Bsp: $(\cos(2x+3))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f(x) = \cos(x)$ $= -\sin(2x+3) \cdot 2$

$g(x) = 2x+3$ $= -2\sin(2x+3)$

$g'(x) = 2 \cdot 1 + 0 = 2$

$f'(x) = -\sin(x)$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2}$$

Bsp: $$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2}$$

$$= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$