Mathe Intensivkurs

marc.diesse@fu-berlin.de

Literatur: „Brücken zur Mathematik", Hohloch, Kümmerer, Gilg

S1 Zahlenmengen und Rechenregeln

Aussagenlogik

„$\Leftrightarrow$" : „genau dann wenn"

„$\Rightarrow$" : „daraus folgt"

$$2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4$$
$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$$

Mengen (Def):

Eine ‚Menge' ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten, den „Elemente" der Menge

Bsp: $M = \{\text{rot}, \text{schwarz}, \text{Apfel}\} = \{\text{Apfel}, \text{schwarz}, \text{rot}\}$

$M = \{2, 3, 5\ 8\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Mengenoperationen

① $m \in M$ „ist Element von" z.B. $3 \in \{2,3,5\}$

$4 \notin \{2,3,5\}$

② $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\}$

$= \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n < 6\} = \{3, 4, 5\}$

3. $\emptyset = \{\}$

4. $M \subseteq N$ Teilmenge $\{2,3\} \subseteq \{2,3,5\}$

5. $M \cap N$ Schnittmenge $\{2,3\} \cap \{2,5\} = \{2\}$

6. $M \cup N$ Vereinigung $\{2,3\} \cup \{2,5\} = \{2,3,5\}$

7. $M \setminus N$ ohne $\{2,3,6,7\} \setminus \{3,6,8\}$
$= \{2,7\}$

Zahlenmengen

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, .. \}$ = natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$ = ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{ p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$ = rationale Zahlen
- $\mathbb{R}$ = „alle Zahlen" $= \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$
  = reelle Zahlen
- $\mathbb{C} = \{ a + ib \mid , a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \}$

Rechnen mit reellen Zahlen

$a,b \in \mathbb{R}$, $c,d \in \mathbb{R}$
$u,v \in \mathbb{R}$

- Kommutativgesetz

$a + b = b + a$ Bsp $3a + 5c - (3 + 8d)$
$= -(3+8d) + 3a + 5c$

$a \cdot b = b \cdot a$ Bsp $5 \cdot a \cdot b = b \cdot 5 \cdot a$

- Assoziativgesetz

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$
$$(ab)c = a(bc)$$

$$(5+2)+1 = 5+(2+1)$$

$$(2\cdot 3)\cdot 4 = 6\cdot 4$$
$$= 2\cdot 12 = 2\cdot(3\cdot 4)$$

- Distributivgesetz

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

Beachte: „Punkt vor Strich"

$$2\cdot(3+5)$$
$$= 2\cdot 3 + 2\cdot 5$$
$$= 6 + 10 = 16$$

$$-(2+5) = (-1)\cdot(2+5)$$
$$= (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 5$$
$$= -2 - 5$$

$$(-2)\cdot(3+7) = -6-14$$

Beispielaufgabe:

Folgen Term vereinfachen $a,b,c \in \mathbb{R}$

$$4(3a-2b+2(b+3a+c-2(c+2a-3b)))$$

$\underset{\text{Distributivgesetz}}{=}$ $4(3a-2b+2(b+3a+c+(-2)c+(-2)\cdot 2a+(-2)\cdot(-3b)))$

$$= 4(3a-2b+2(b+3a+c-2c-4a+6b))$$

$\underset{\text{komm gesetz}}{=}$ $4(3a-2b+2(3a-4a+b+6b+c-2c))$

$\underset{\text{Distributivgesetz}}{=}$ $4(3a-2b+2(a(3-4)+b(1+6)+c(1-2)))$

$$= 4(3a-2b+2(a(-1)+b7+c\cdot(-1)))$$

$$\underset{\text{Distributivgesetz}}{=} 4\,(3a-2b+2\cdot(-1)\cdot a+2\cdot 7\cdot b+2\cdot c\cdot(-1))$$

$$= 4\,(3a-2b-2a+14b-2c)$$

$$= 4\,(3a-2a+14b-2b-2c)$$

$$= 4\,(1a+12b-2c)$$

$$\underset{\text{Dist gesetz}}{=} \underline{\underline{4a+48b-8c}}$$

§2 Binomische Formeln und Summen

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b$
  $= a^2 + ba + ab + b^2 = \underline{a^2+2ab+b^2}$

- $(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$
  $= a^2 - 2ab + b^2$

- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Bsp: $(2x+3y)^2 = \underset{}{\overset{(2x)^2}{\overset{\shortparallel}{4x^2}}} + 2\cdot 2\cdot 3\cdot x\cdot y + 9y^2$
$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

$$(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

- quadratische Ergänzung:

$$\underbrace{4a^2-20a}\ +30 = \underbrace{(2a-5)^2-25}\ +30$$

$=$

$$(2a-5)^2+5 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\cancel{a}\left(\left(x + \frac{b}{a2}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2 4} + \frac{c}{a}\right) = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{a2}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - ca4}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underline{\underline{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

- Summennotation

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

z.B. $\sum_{k=2}^{5} a_k$ $\qquad a_2 = 1,\ a_3 = 5,\ a_4 = 3,\ a_5 = -1$

$$= a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$= 1 + 5 + 3 - 1 = \underline{\underline{8}}$$

z.B. $\sum_{k=1}^{4} \underset{\underset{a_k}{\shortparallel}}{k^2} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

$$= 1 + 4 + 9 + 16$$

$$= \underline{\underline{30}}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + .. + n$$ (Gaußsche Summe)

z.B.

$$2 \cdot S_n = \begin{array}{l} 1 + 2 + \ldots + 100 \\ 100 + 99 + \ldots + 1 \end{array}$$

$$= 101 + 101 + \ldots + 101$$

$$= 100 \cdot 101$$

$$\Rightarrow S_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = \underline{\underline{5050}}$$

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$ (Gauß'sche Summenformel)

8e) $-(a^2 + b)^2 = (-1) \cdot (a^2+b) \cdot (a^2+b)$

$a^2 = a \cdot a$

$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$
$= a^2 + 2ab + b^2$

$$(c+d)^2 = c^2 + 2 \cdot c \cdot d + d^2$$

$$(c+d)^2 = (c+d)(c+d)$$
$$= (c+d) \cdot c + (c+d) \cdot d$$
$$= c^2 + 2 \cdot c \cdot d + d^2$$

$$(\underbrace{a^2}_{=c} + \underbrace{b}_{=d})^2 = (c^2 + 2cd + d^2)$$
$$= (a^2)^2 + 2a^2 \cdot b + b^2$$
$$= a^{2 \cdot 2} + 2a^2b + b^2 = a^4 + 2a^2b + b^2$$

$$-(a^2+b)^2 = \underline{\underline{-a^4 - 2a^2b - b^2}}$$

A 54

(a) $2+4+6+8+10+12 = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 2\cdot 5 + 2\cdot 6$

Folge $2\cdot k$

$$= \sum_{k=1}^{6} 2k$$

(d) $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \cdot \frac{x^k}{k!}$

$k=0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$$\underbrace{(-1)^k}_{\begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ -1 & k \text{ ungerade} \end{cases}} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

$0! = 1$

$1! = 1$

S3 Potenz und Wurzelrechnung

$a, b \in \mathbb{R}$

$n, m \in \mathbb{Z}$

$n \geq 1 \qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \,..\, \cdot a}_{n\text{-mal}}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \cdot a .. \, a.}$$

Regeln

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\ \bullet\ a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \end{array}}$$

Vorsicht $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

z.B $2^2 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$

$2^5 = 32$

$$\boxed{\bullet\ (a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

zB $(2^2)^3 = 2^6$

$$\left(\bullet\ \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n} \right)$$

$$\left(\bullet\ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \right)$$

Bsp = $\left((-2)^2\right)^{-3} = (-2)^{2 \cdot (-3)}$

$= (-2)^{-6} = \frac{1}{64}$

$= (4)^{-3} = \frac{1}{64}$

- Wurzeln, Potenze mit rationalen Hochzahlen

$\boxed{a > 0}$

$b = \sqrt[n]{a} \iff b^n = a$

mit

$n = 2, 3, 4, ..$

$n = 2$ heißt Quadratwurzel

wichtig: $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$

z.B $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$

$= |-2|$

Potenzschreibweise

$$\boxed{a^{1/n} := \sqrt[n]{a} \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Rechenregeln

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = a^{1/2}\cdot b^{\frac{1}{2}} = (a\cdot b)^{1/2} = \sqrt{ab}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} = \frac{a^{1/2}}{b^{1/2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Beispiele:

$$0{,}003 = 3\cdot\frac{1}{1000} = 3\cdot\frac{1}{10^3} = \underline{\underline{3\cdot 10^{-3}}}$$

$$7\cdot 10^{-4} = 0{,}0007$$

$$7\cdot 10^{2} = 700$$

Bsp. $$\sqrt{4(x^2+1)^2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{(x^2+1)^2} = 2\cdot(x^2+1)$$

$$= (2^2)^{1/2}\cdot\left((x^2+1)^2\right)^{1/2} = 2^1\cdot(x^2+1)^{2\cdot 1/2}$$

$$= \underline{\underline{2\cdot(x^2+1)}}$$