K3 Komplexe Zahlen

Wofür brauchen wir komplexe Zahlen ?

z.B. $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lsg. in $\mathbb{R}$

Deswegen $\mathbb{C} = \{a + i \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, $\boxed{\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \quad (\text{mit } b = 0)}$

„komplexe Zahlen" mit $i^2 = i \cdot i = -1$

(ist Lsg. von $x^2 + 1 = 0$)

Notationen

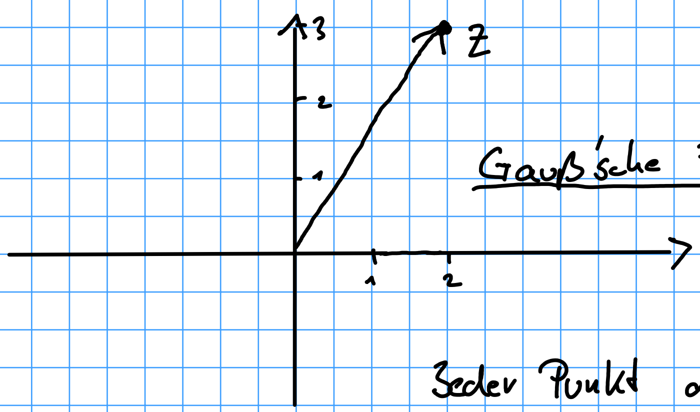
Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ ist

$Re(z) = a$ Realteil von z

$Im(z) = b$ Imaginärteil von z

Beispiel $z = 2 + 3i$ hat Realteil 2

Imaginärteil 3



Gauß'sche Zahlenebene

Jeder Punkt der Gauß'schen Zahlenebene entspricht genau einer komplexen Zahl

Rechnen in $\mathbb{C}$

genauso wie in $\mathbb{R}$ mit $i^2 = -1$

Also z.B

① Addition $(2 + 3i) + (1 + 5i) = 2 + 1 + 3i + 5i$

$= \underline{\underline{3 + 8i}}$

② Multiplikation $(1 + 2i) \cdot (2 + 3i) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3i + 2i \cdot 2 + (2i) \cdot (3i)$

$= 2 + 3i + 4i + 2\cdot 3\cdot i\cdot i = 2 + 7i + 6\cdot i^2$

$= 2 + 7i + 6\cdot(-1)$

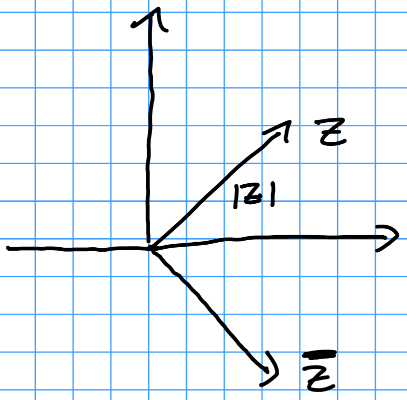
$= 2 - 6 + 7i = \underline{\underline{-4 + 7i}}$

Bsp (2.1) $(-1+2i)\cdot i + 3i - 2$

$= -1\cdot i + 2\cdot i^2 + 3i - 2 = -i - 2 + 3i - 2$

$= -4 + 2i$

③ Neu: $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$ „Komplex konjugiert"



④ Betrag $z = a + ib$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ = ‚Länge des Pfeils' $\in \mathbb{R}$

Bsp: $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$|i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

$|-3+0\cdot i| = \sqrt{(-3)^2+0^2} = 3$

auch $\boxed{|z|^2 = z\cdot\bar{z}}$

⑤ Division (erweitere mit kompl. konj. Nenner)

$$\frac{3+4i}{1+2i} = \frac{3+4i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{3-6i+4i-8i^2}{1-\cancel{2i}+\cancel{2i}-4i^2}$$

$$= \frac{3-2i+8}{1+4} = \frac{11-2i}{\underset{\overset{\shortparallel}{|1+2i|^2}}{⑤}} = \underset{\text{Re}}{\frac{11}{5}} \underset{\text{Im}}{- \frac{2}{5}}\, i$$

Bsp Komplexe Gleichungen:

$$(x-(1+2i))\cdot(x-(1-2i))$$

$$= x^2 - x\,(1-2i) - (1+2i)\cdot x + (1+2i)(1-2i)$$

$$= x^2 + (-1)\cdot x + \cancel{2i\cdot x} - x \cancel{-2i\cdot x} + 5$$

$$= x - 2x + 5$$

mit Nst. $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2}$

$$= \frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}$$

$$= \frac{2\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{16}}{2}$$

$$= \frac{2\pm i\cdot 4}{2}$$

$$= \frac{2}{2} \pm \frac{4}{2}\cdot i = \underline{\underline{1\pm 2i}}$$

Polynom mit reellen Koeffizienten

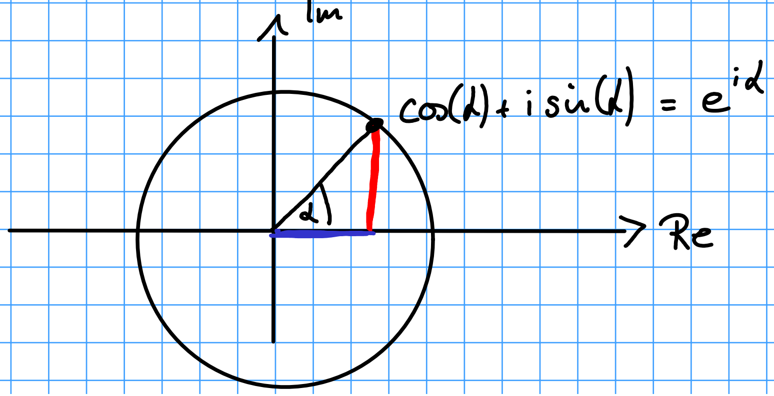
$\Rightarrow$ z und $\bar{z}$ sind Nst.

Komplexe Exponentialfunktion

$$e^{i\cdot\alpha} = \cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha)$$

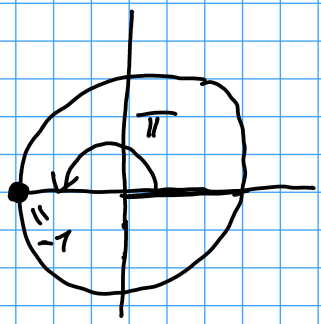
$\alpha \in \mathbb{R}$

α in Bogenmaß



Bsp: ① $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\cdot\sin(\pi)$

$= -1 + i\cdot 0 = \underline{\underline{-1}}$

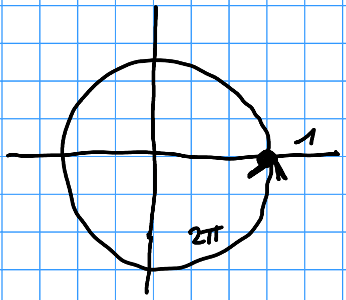


$\boxed{\text{Euler Formel} \quad e^{\pi i} + 1 = 0}$

② $e^{2\pi i}$

$= \cos(2\pi) + i\cdot\sin(2\pi)$

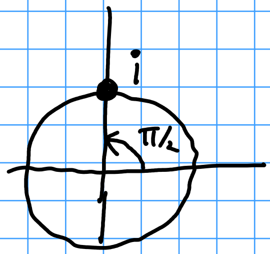
$= 1 + i\cdot 0 = \underline{\underline{1}}$



③ $e^{\pi/2 \cdot i} = \cos(\pi/2) + i\cdot\sin(\pi/2)$

$= 0 + i\cdot 1$

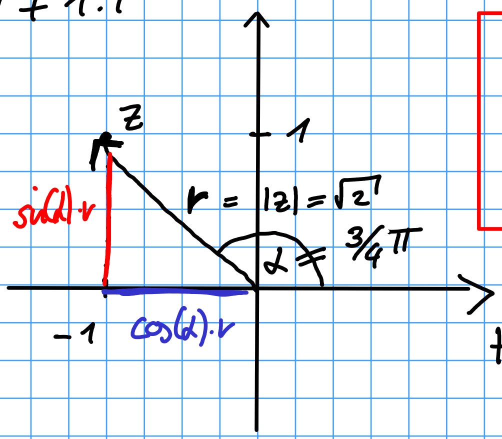
$= \underline{\underline{i}}$



$\boxed{\text{Alle Komplexe Zahlen } z \text{ mit } |z| = 1 \text{ haben Darstellung } z = e^{i\alpha}}$

Polardarstellung

Bsp: $z = -1 + 1\cdot i$



$$z = \cos(\alpha)\, r + \sin(\alpha)\, r\cdot i$$
$$= r\cdot e^{i\alpha}$$

Hier: $r = \sqrt{2}$

$\alpha = 3/4\pi$

$$z = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$$

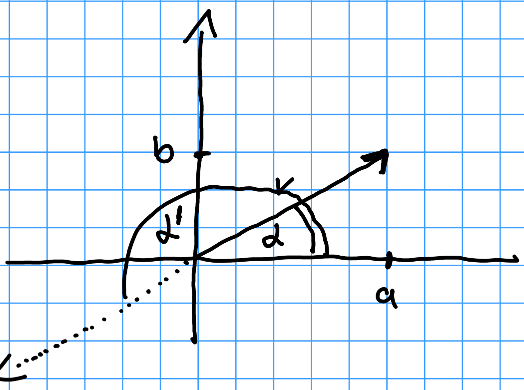
$$= \underline{\underline{\sqrt{2}\cdot e^{3/4\pi}}}$$

Umrechnung Polardarstellung → Standarddarstellung (kartesische)

$$z = r\cdot e^{i\varphi} = \underbrace{r\cdot\cos(\alpha)}_{Re(z)} + i\cdot\underbrace{r\cdot\sin(\alpha)}_{Im(z)}$$ klar

Umrechnung kartesische Darstellung → Polardarstellung

$z = a + ib$



$\left(\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right.$ für 1. u. 4. Quadranten$\left.\right)$

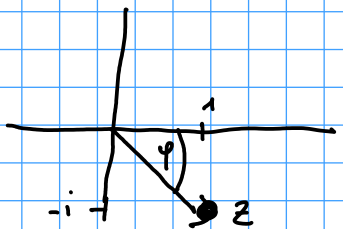
$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\alpha = \begin{cases} \arctan\left(b/a\right), & a > 0 \quad (z \text{ ist in 1. oder 4. Quadra.}) \\ \arctan\left(b/a\right) + \pi, & a < 0 \quad (z \text{ ist im 3. oder 2. Quadr.}) \\ \pi/2 & z = i\cdot b \quad (a = 0) \\ -\pi/2 \text{ od. } \frac{3}{2}\pi & z = -ib \quad (a = 0) \end{cases}$$

$= \operatorname{atan2}(a, b)$

Bsp: ① $z = 1 - i$

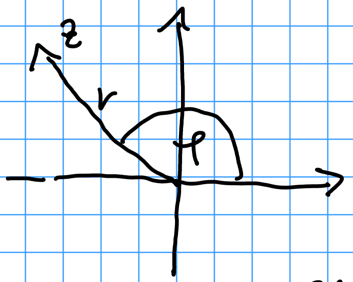
$= \sqrt{2}\cdot e^{-\pi/4\cdot i}$



$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\pi/4$

② $z = -1 + i$



$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\pi/4 + \pi$

$= \underline{\underline{3/4\,\pi}}$

$z = \sqrt{2} \cdot e^{3/4\pi \cdot i}$

③ $(-1+i)^4 = \left(\sqrt{2} \cdot e^{3/4\pi i}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \cdot \left(e^{3/4\pi i}\right)^4$

$= 4 \cdot e^{3/4\pi i \cdot 4} = 4 \cdot e^{3\pi i} = 4 \cdot (-1) = \underline{\underline{-4}}$

K4 Lineare Algebra

K4.1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

LGS

$$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 x_3 &= 1 \\ 1 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Big\downarrow$$

Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \underset{\downarrow}{2} \times \underset{\rightarrow}{3}$ Matrix

Matrix-Operationen

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Addition

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 \\ 3+1 & 4+0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}}}$$

$A - B$ analog

$\cancel{A+C}$ geht nicht!! (nicht dieselbe Form / Dimension)

Multiplikation mit Skalar

$$5 \cdot C = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 0 & 5 \cdot 3 & 5 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot1+2\cdot0 = 1$$

Multiplikation

$$A\cdot C = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

„lege Zeile auf Spalte"

$$= \begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot0+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot1\\ 3\cdot1+0\cdot4 & 3\cdot0+4\cdot3 & 3\cdot2+4\cdot1\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}1 & 6 & 4\\ 3 & 12 & 10\end{pmatrix}}}$$

$$\cancel{C\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}}$$

geht nicht!

(„Zeilenlänge 1 muss Spaltenlänge 2")

!! Wenn $A\cdot B$ und $B\cdot A$ existieren muss es nicht dasselbe sein !!:

$$AB = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$BA = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

① $N = \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ Nullmatrix

② $E = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}}_{n}\Big\} n$ Einheitsmatrix

A $n\times n$-Matrix $\Rightarrow$ $A\cdot E = E\cdot A = A$

③ $A = \begin{pmatrix}a_1 & * & * & * & \cdots & & & \\ 0 & a_2 & * & * & * & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & * & *\end{pmatrix}$ A hat Zeilenstufenform

(In jeder Zeile ist der 1. Eintrag $\neq 0$ weiter rechts)

Determinanten

A $n \times n$-Matrix. Dann $\det A \in \mathbb{R}$ nützliches Hilfsmittel bei Lösung von LGS.

Bsp: ① $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 2×2 Matrix

$$\det A = 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 2 - 12 = \underline{\underline{-10}}$$

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3×3 Matrix

Regel von Sarrus

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 5 & 7 \\ -2 & 0 \end{array}$$

$$\det A = 1 \cdot 7 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 \cdot 0 - (-2) \cdot 7 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 0$$

$$= 7 + 0 + 0 + 42 - 0 - 0$$

$$= \underline{\underline{49}}$$

③ $n \times n$-Matrix siehe Entwicklungssatz von Laplace.

LGS

Bsp:

$$\begin{array}{l} -x + y + z = 0 \\ x - 3y - 2z = 5 \\ 5x + y + 4z = 3 \end{array} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ \underbrace{5 \quad 1 \quad 4}_{A} & & & 3 \end{array}\right)$$

↳ falls 0 uberall heißt LGS homogen

Zum Lösen bringe in Zeilen Stufen form (ZSF)
mit <u>Gauß Algorithmus</u>
erlaubt Zeilen Umformungen
und Zeilen tauschen

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 5 \\ 5 & 1 & 4 & | & 3 \end{pmatrix} \quad III + 5 \cdot I$$

Addiere I auf II

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 5 \\ 0 & \textcircled{6} & 9 & | & 3 \end{pmatrix} \quad III + 3 \cdot II$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 6 & | & 18 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{rcl} -x + y + z & = & 0 \\ -2y - z & = & 5 \\ 6z & = & 18 \quad | \cdot \tfrac{1}{6} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{18}{6} = \underline{3}$$

$$\underset{\text{in } II}{\Rightarrow} \quad -2 \cdot y - 3 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad -2y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = \underline{\underline{-4}}$$

$$\underset{I}{\Rightarrow} \quad -x - 4 + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \underline{\underline{-1}}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Probe machen : $-(-1) + (-4) + 3 = 0$ ✓

$-1 - 3(-4) - 2 \cdot 3 = 11 - 6 = 5$ ✓

$5 \cdot (-1) + (-4) + 4 \cdot 3 = -5 - 4 + 12 = 3$ ✓

oder

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrixmult.}}}{\cdot} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1) + 1\cdot(-4) + 1\cdot 3 \\ 1\cdot(-1) + (-3)\cdot(-4) + (-2)\cdot 3 \\ 5\cdot(-1) + 1\cdot(-4) + 4\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

②

$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$3x_1 + 6x_2 = 4$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-3\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

$$\leftrightsquigarrow \quad x_1 + 2x_2 = 3$$
$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = -5$$

$\Longleftrightarrow$ keine Lösung $\mathbb{L} = \{\}$

③

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$
$$x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_3 + 3x_4 = 2$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \text{III} - 2\,\text{II}$$

↓ wähle beliebig

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\leftrightsquigarrow \quad 1\cdot x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$
$$x_3 + x_4 = 0$$
$$x_4 = 2$$

$\Rightarrow \quad x_4 = \underline{\underline{2}}$

$\overset{\Rightarrow}{\text{in II}} \quad x_3 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_3 = -2}}$

$\overset{\Rightarrow}{\text{in I}} \quad x_1 + 2x_2 + 2\cdot(-2) + 2 = 1$

$\Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 = 3$

Wähle $x_2 = r$ beliebig

$\Rightarrow \quad x_1 + 2r = 3$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 3 - 2r}}$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3-2r \\ r \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \; r \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; r \in \mathbb{R} \right\}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 0 + 2\cdot(-2) + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 3 + 0\cdot 0 + 1\cdot(-2) + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 3 + 0\cdot 0 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\downarrow$ wähle x_2 beliebig

Allg.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_1 & * & & & & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 & & & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & \underbrace{* \; * \; \dots \; *}_{\text{wähle beliebig } x_5 \dots x_n} & b_3 \end{array}\right)$$

$a_1, a_2, a_3 \neq 0$

Satz für quadratisches LGS

n Zeilen
$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11}x_1 + \dots \qquad + a_{1n}x_n & b_1 \\ & \vdots \\ \underbrace{a_{n1}x_1 + \quad \dots \quad + a_{nn}x_n}_{n \text{ Spalten}} & b_n \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{Koeffizientenmatrix}$$

$\det A \neq 0 \Longleftrightarrow$ LGS hat genau eine Lösung

$\det A = 0 \Longleftrightarrow$ A ist singulär

$\Longleftrightarrow$ LGS hat keine oder ∞-viele Lsg.

(homog. LGS und $\det A = 0$

$\Longleftrightarrow$ immer ∞-viele Lsg)

Inverse Matrix

A quadratisch, $\det A \neq 0$

Dann ex. Inverse A^{-1} von A mit $AA^{-1} = E = A^{-1}A$

Bsp:
$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ \textcircled{1} & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{A} \underset{II-I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \textcircled{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)^{I-2II}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A^{-1}}$$

Probe $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Mit Inverser Matrix LGS Lösen

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Koeff.m.}}}{A}\cdot\underset{\substack{\nwarrow\\ \text{Unbek.}}}{x} = b \;\nwarrow \text{r.S.}$$

Falls $\det A \neq 0$

$$\Rightarrow \quad A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$\Rightarrow \quad Ex = A^{-1}b$$

$$\Rightarrow \quad x = A^{-1}b$$

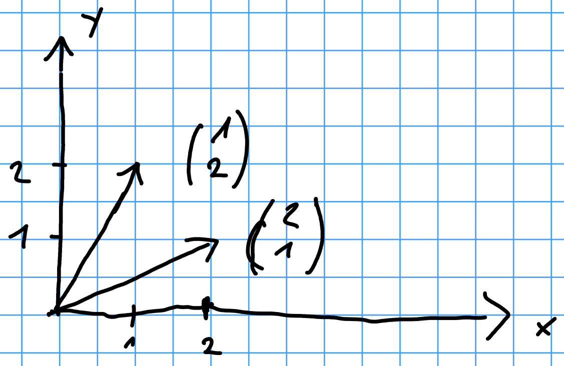
$$\mathbb{L} = \{A^{-1}b\}$$

K 4.2 Vektorrechnung und analytische Geometrie

Vektoren: Vektoren sind $n \times 1$ Matrizen

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Falls ein KS gegeben ist haben wir folgende Anschauung eines Vektors als Pfeil:



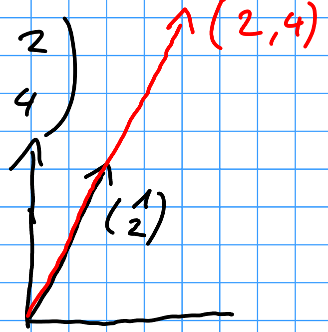
Wichtig ist nur Länge und Richtung nicht Startpunkt

Schreibweise

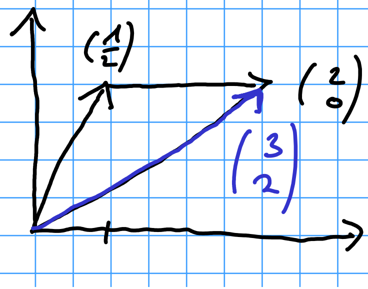
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 1 u. 2 sind die Koordinaten des Vektors

Vektoroperationen wie bei Matrizen

Skalierung $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$



Addition $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



Betrag

$$\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right| = |\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

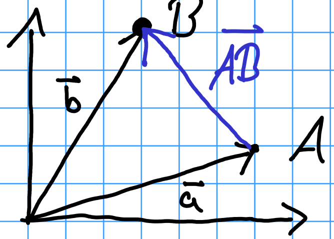
$$\left|\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}$$

Punkte ⟷ Vektoren

Punkte im Raum $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^n)$ sind gegeben

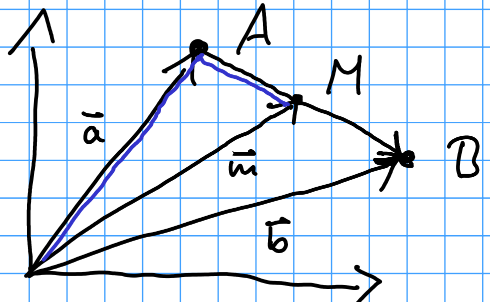
durch Ortsvektoren im $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$



Verschiebung $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

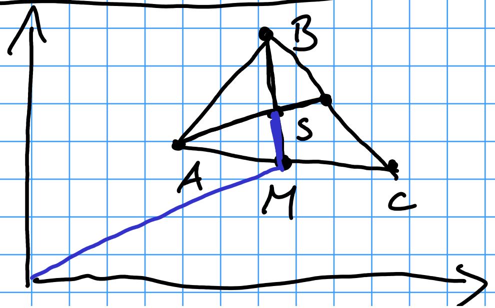
Erste Anwendungen:

Mittelpunkt



$$\begin{aligned}\vec{m} &= \vec{a} + \tfrac12 \overrightarrow{AB}\\ &= \vec{a} + \tfrac12(\vec{b}-\vec{a})\\ &= \vec{a} + \tfrac12\vec{b} - \tfrac12\vec{a}\\ &= \tfrac12\vec{a} + \tfrac12\vec{b}\\ &= \tfrac12(\vec{a}+\vec{b})\end{aligned}$$

Schwerpunkt im Dreieck



$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{m} + \tfrac13 \overrightarrow{MB}\\ &= \vec{m} + \tfrac13(\vec{b}-\vec{m})\\ &= \tfrac12(\vec{a}+\vec{c}) + \tfrac13(\vec{b}-(\vec{a}+\vec{c})\cdot\tfrac12)\end{aligned}$$

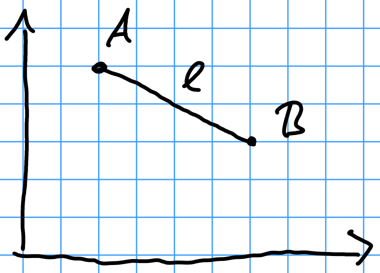
so.

$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{c}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)\vec{c} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

Abstand



$$l = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}|$$

Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$l = |\vec{b} - \vec{a}|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Das Skalarprodukt

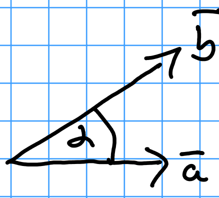
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = (1 \; 2 \; 1) \underset{\underset{\text{Matrixmult.}}{\uparrow}}{\cdot} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3$$

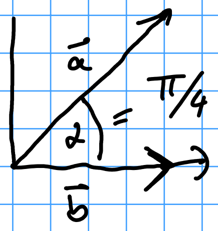
$$= \underline{\underline{5}} \text{ ist Skalar}$$

Nur für $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ gilt:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

Bsp: $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{a} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$



$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|\vec{b}| = 1$

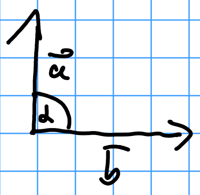
$|\vec{a}| = \sqrt{2}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

$$\underset{?!}{=} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$= \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \quad \checkmark$$

Orthogonale Vektoren



$\alpha = \pi/2 \mathrel{\hat{=}} 90°$

Dann $\vec{a} \perp \vec{b}$

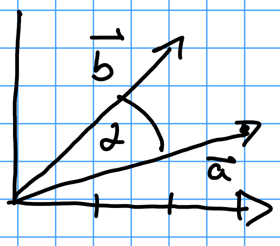
$$\Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$= 0$$

weil $\cos(\pi/2) = 0$

Winkelberechnung Bsp:

$\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 8 \overset{!}{=} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$= \sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \cos(\alpha)$$

$$= \sqrt{10} \cdot \sqrt{8} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad 8 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{8} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{8}{\sqrt{10}\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}\,\cancel{\sqrt{8}}}{\sqrt{10}\cdot\cancel{\sqrt{8}}} = \sqrt{\frac{8}{10}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\underset{TR}{\Rightarrow} \quad \alpha \approx 0.46 \mathrel{\hat{\approx}} \underline{\underline{26{,}56^\circ}}$$

Das Kreuzprodukt

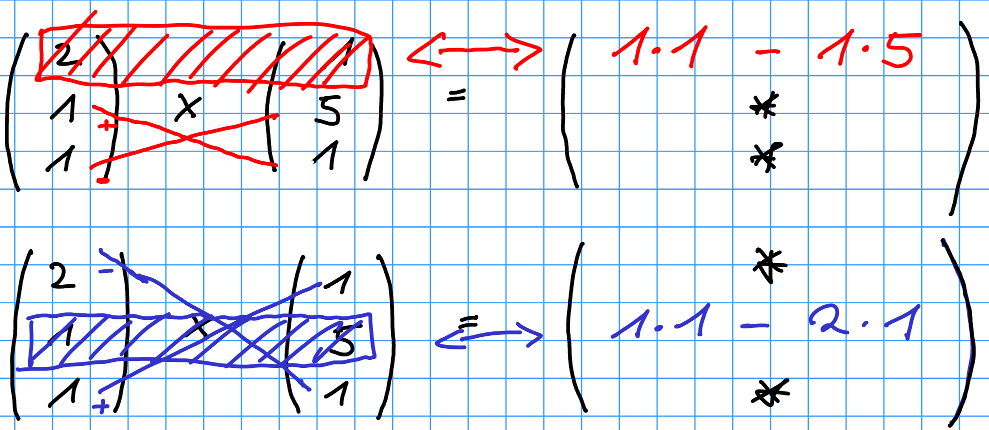
Das Kreuzprodukt ist neben dem Skalarprodukt das zweite wichte Produkt aus zwei Vektoren. Das Kreuzprodukt wird auch als Vektorprodukt bezeichnet, weil das Ergebnis wieder Vektor ist (und kein Skalar, wie beim Skalarprodukt.

Das Kreuzprodukt ist i.A nur definiert im $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{R}^2 \leq \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot2-1\cdot5\\1\cdot1-2\cdot2\\2\cdot5-1\cdot1\end{pmatrix}$$

Am besten zu merken ist die Multiplikationsregel so:

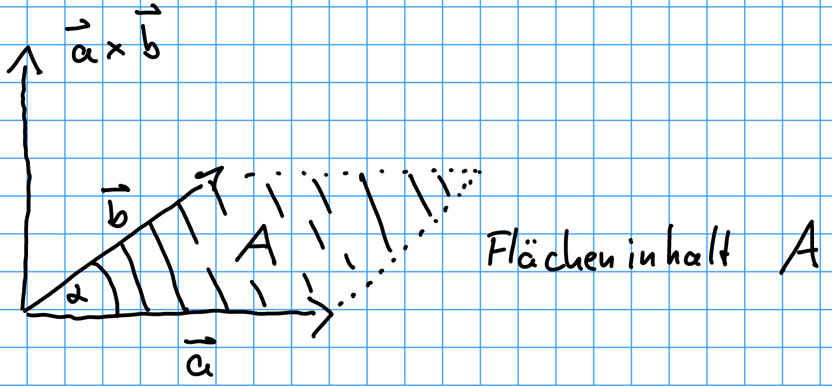
Man deckt die Zeile ab, für welche man den Eintrag im Ergebnis bestimmen möchte und wendet die Kreuzoperation auf die restlichen Zeilen an:



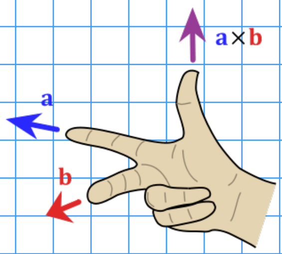
Vorsicht: !!
Hier Reihenfolge
+ - verkehrt
bzw. erster
Eintrag nach
abgedeckter Reihe
immer +

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\*\\2\cdot5-1\cdot1\end{pmatrix}$$

Geometrische Bedeutung:



$\vec{a}\times\vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$. Die Richtung kann durch die rechte Hand Regel bestimmt werden.



Der Betrag von $\vec{a}\times\vec{b}$ entspricht gerade dem Flächeninhalt A des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelograms.

Außerdem gilt: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.

Eigenschaften Zusammengefasst:

① $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a}$ rechte Hand Regel
$a\times\vec{b} \perp \vec{b}$ für Richtung

② $|\vec{a}\times\vec{b}| = A = \sin(\alpha)\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

③ $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$.