K2.3 Gleichungen

Ein Ausdruck der Form

$$f(x) = g(x)$$ heißt Gleichung z.B. $x^2 = x + 1$

mit Def. bereich $D = D_f \cap D_g$

und Lösungsmenge $L = \{x \in D \mid f(x) = g(x)\}$

Bsp:

① $2x + 1 = 3x - 5$

$D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$2x+1 = 3x-5 \quad | -1$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x+1-1 = 3x-5-1$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x = 3x-6 \quad | -3x$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x-3x = \cancel{3x}-\cancel{3x}-6$$
$$\Leftrightarrow \quad -x = -6 \quad | \cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 6}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{6\}$$

② $x^2 + 1 = 2x$ „quadratische Gleichung"

$D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$x^2+1 = 2x \quad | -2x$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 1$$

$L = \{1\}$

im Allgemeinen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ „Mitternachtsgleichung"

z.B. $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Äquivalenzumformung

Umformungen einer Gl. bei denen sich die Lösungsmenge nicht ändert

Gegenbsp:

① $x = 2 \mid ()^2 \quad D = \mathbb{R}$

$\quad L = \{2\}$

$\Rightarrow x^2 = 4 \quad D = \mathbb{R}$

$\quad L = \{2, -2\}$

$\boxed{\text{Am Schluss für alle Lösungen } x \text{ überprüfen } x \in L \text{ und } x \in D \text{ !}}$

② Siehe Übungen + Musterlösung

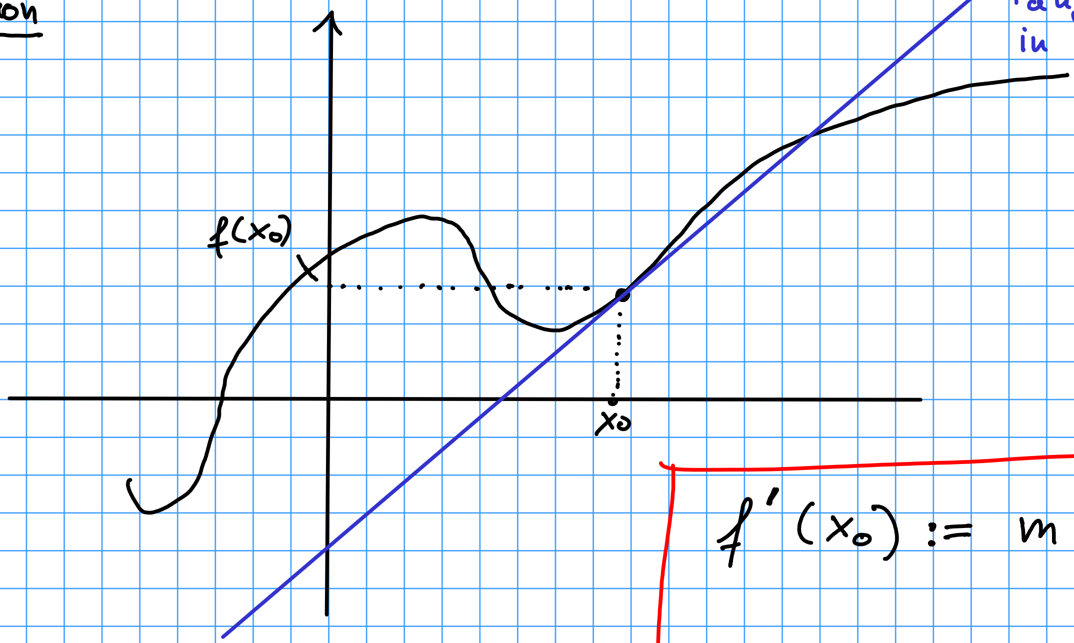
K 2.4 Differentialrechnung

Gegeben $f: D_f \to \mathbb{R}$

Illustration

Tangente an Kurve in $(x_0, f(x_0))$

$y = mx + c$



$$f'(x_0) := m = \text{„Steigung der Tangente an die Kurve in } (x_0, f(x_0))\text{"}$$

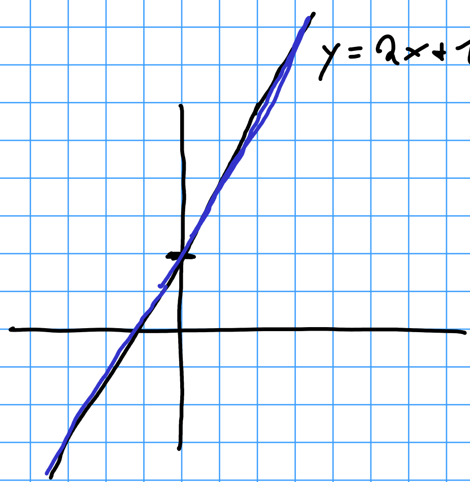
$$\frac{d}{dx} f(x_0) = m$$

Bsp:

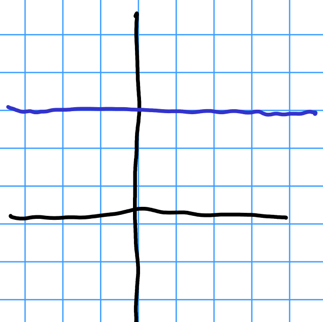
$f(x) = 2x + 1$

hat Steigung 2 überall

$f'(x) = 2$



Standardfkt



$f(x)$	$f'(x)$
$mx + c$	m
$x^n, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$c, c \in \mathbb{R}$	0

$\frac{d}{dx} 3x + 5 = 3$

$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$

$\frac{d}{dx} 5 = 0$

Wie berechne ich Ableitungen von beliebigen Fkt ?

Linearität

$$(a \cdot f)' = a \cdot f' \quad , \quad f \text{ Fkt}, \; a \in \mathbb{R}$$

z.B. $\left(3 \cdot x^5\right)' = 3 \left(x^5\right)' = 3 \cdot 5 \cdot x^{5-1} = \underline{\underline{15\, x^4}}$

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' \quad , \quad f_1, f_2 \text{ Fkt.}$$

z.B. $\left(3x^5 + 2x^4\right)' = \left(3x^5\right)' + \left(2x^4\right)' = \underline{\underline{15x^4 + 8x^3}}$

Was ist mit $f_1 \cdot f_2$?

Produktregel

$$(f \cdot g)' = f'g + f g' \qquad f, g \text{ Fkt.}$$

z.B. $\left(x^2 \cos(x)\right)' = \left(x^2\right)' \cos(x) + x^2 \cdot \left(\cos(x)\right)'$

$= 2x \cos(x) + x^2(-\sin(x)) = \underline{\underline{2x \cos(x) - x^2 \sin(x)}}$

Was ist mit $\sin(x^2)$?

Kettenregel

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

„Äußere Ableitung · Innere Ableitung"

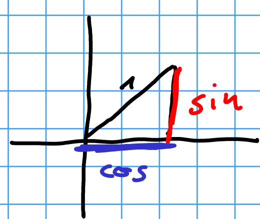
z.B. $\left(\sin(x^2)\right)' = \underline{\underline{\cos(x^2) \cdot 2x}}$

$f(x) = \sin(x)$
$g(x) = x^2$

Was ist mit $\frac{f}{g}$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$



z.B. $\left(\tan(x)\right)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2(x)}}}$$

Mehrfache Ableitungen

$$f'' = (f')', \quad f''' = (f'')' \; \ldots \quad \text{usw}$$

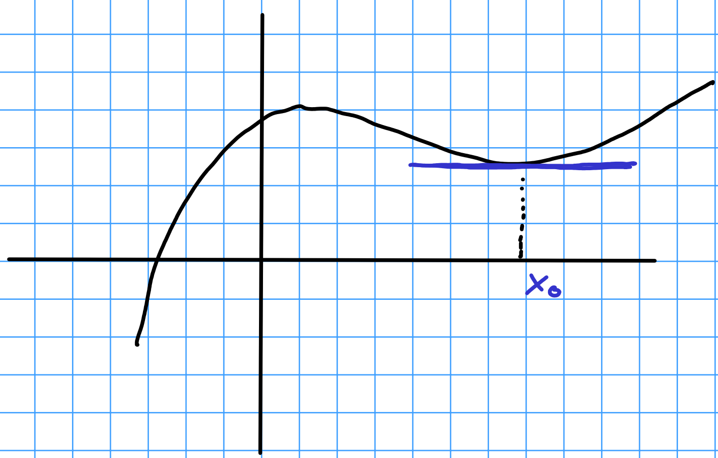
$$f^{(3)}, \quad f^{(4)}$$

Bsp: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2\cdot 1$, $f''' = 0$, $f^{(4)} = 0, \ldots$

K2.5 Extremwerte, Grenzwerte und Kurvendiskussion

Extremwerte:

Sei $f: D_f \to \mathbb{R}$. Ein Wert $x_0 \in D_f$ mit $f'(x_0) = 0$ heißt Extremwert von f

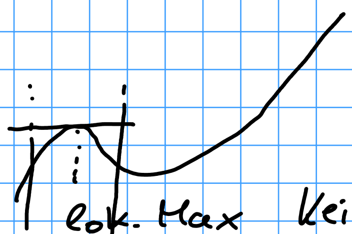


Satz

x_0 Extremwert von f mit

$f''(x_0) < 0$ ist lok. Max

$f''(x_0) > 0$ ist lok. Minimum



lok. Max Kein globales Max

Kurvendiskussion

Skizziere $f(x) = \dfrac{x^2+5x}{x-4}$

Extremwerte

$$-x^2 - \cancel{5x}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+5)\cdot(x-4) - (x^2+5x)\cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 \cancel{+5x} - 8x - 20}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 8x - 20}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$\iff x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{2}$$

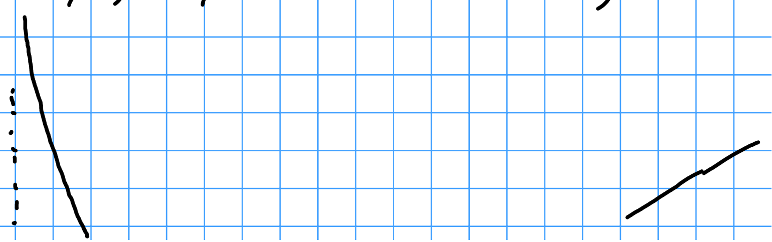
$$= \frac{8 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{8 \pm 12}{2}$$

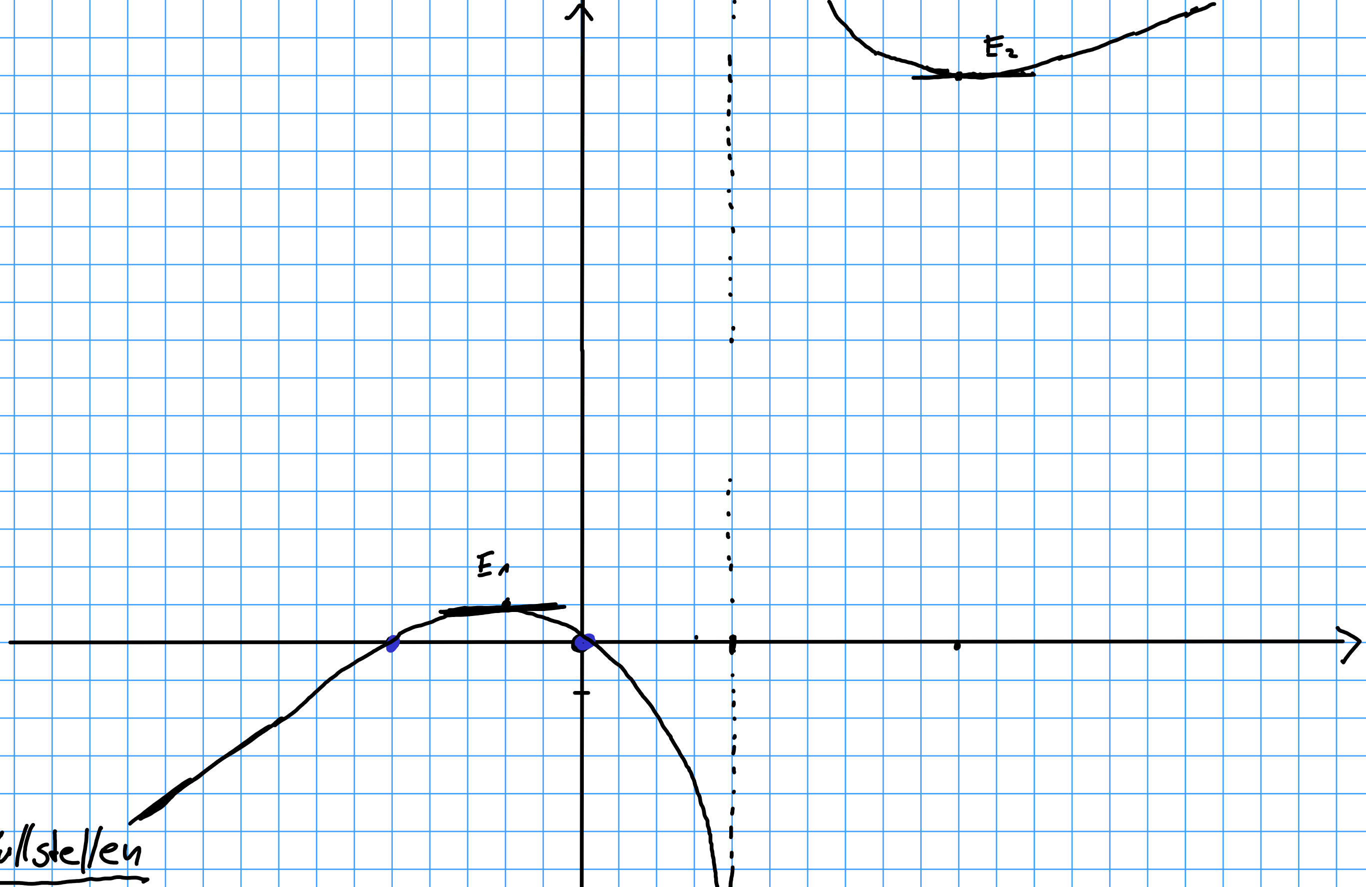
$$= 4 \pm 6 = -2, 10$$

$f(-2) = \underline{\underline{1}}$

$f(10) = 25$

$E_1 = (-2, 1)$, $E_2 = (10, 25)$





Nullstellen

$$f(x) = 0 \iff x^2 + 5x = 0$$
$$\iff x(x+5) = 0$$
$$\iff x = 0, -5$$

Schnittpunkt mit x-Achse

$$f(0) = 0$$

Pol (Nst im Nenner)

bei $x = 4$

$x \to 4$ von links $\qquad \dfrac{\overbrace{x^2+5x}^{>0}}{\underbrace{x-4}_{<0}} \to -\infty$

$\to 0$

$x \to 4$ von recht $\qquad \dfrac{\overbrace{x^2+5x}^{>0}}{\underbrace{x-4}_{>0}} \to \infty$

$x \to \pm\infty$ (Grenzwerte)

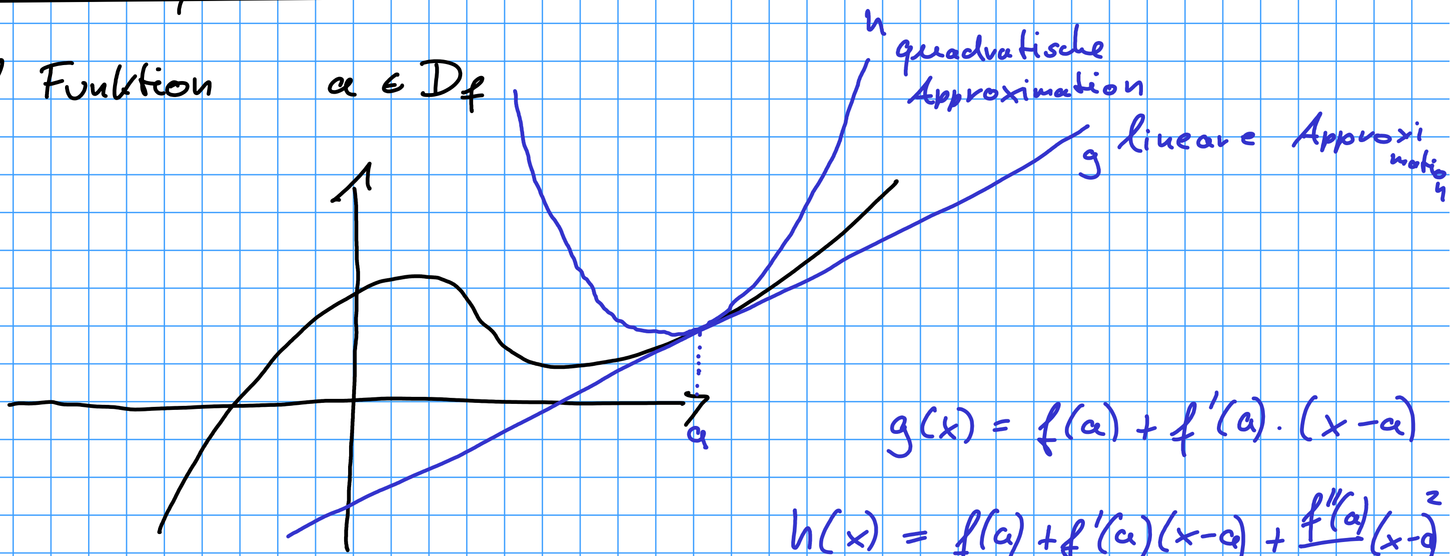
$x \to \infty$: $\quad \dfrac{x^2+5x}{x-4} = \dfrac{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}$

$$= \underbrace{x}_{\to\infty} \cdot \frac{1+\overbrace{\frac{5}{x}}^{\to 0}}{1-\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}} \to \infty$$

$x \to -\infty$: $\quad \dfrac{x^2+5x}{x-4} = x \cdot \dfrac{1+\overbrace{\frac{5}{x}}^{\to 0}}{1-\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}} \to -\infty$

K2.6 Taylorreihen

f Funktion $\quad a \in D_f$



$g(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$

$h(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$

Approximation Ordnung n an a

$\Leftrightarrow$ Taylorpolynom $T_{n,a}$ (n: Ordnung, a: Entwicklungspunkt)

mit $\quad T_{n,a}(a) = f(a)$

$\quad T'_{n,a}(a) = f'(a)$

$\quad \vdots$

$\quad T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} \quad \text{(Taylorpolynom)}$$

Für „viele diff.bare" Fkt f und x „in der Nähe" von a

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n} \quad \left(\begin{array}{l}\text{Taylorreihe}\\ \text{Potenzreihenentwicklung}\end{array}\right)$$

Bsp:

$f(x) = \cos(x)$ Entwicklungspunkt $x = 0$

$f'(x) = -\sin(x)$ Ordnung $n = 2$

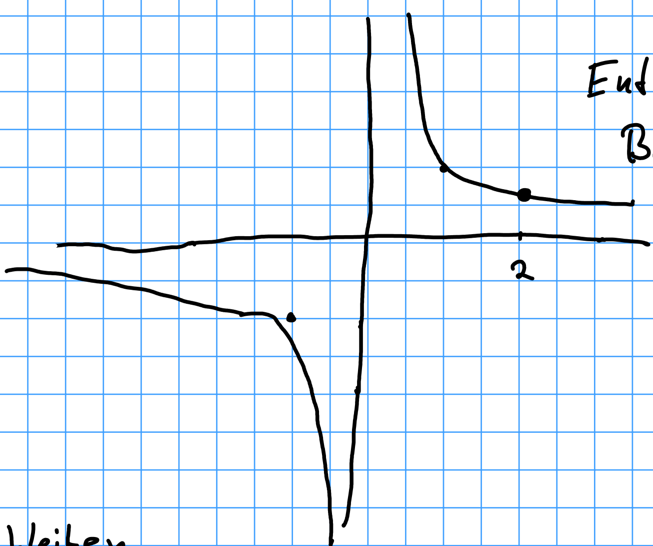
$f''(x) = -\cos(x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \\ f''(0) = -1 \end{array}\right\} \quad T_{2,0}(x) = 1 + 0 \cdot (x-0) - \frac{1}{2}\cdot(x-0)^2$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{1}{2}x^2}}$$

2

$f(x) = \frac{1}{x}$



Entwicklungspunkt $a = 2$

Bis Ordnung 2

Vorgehen:

(1) Ableiten

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f'(x) = -1\, x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$$f''(x) = -1\cdot(-2)\cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k! &= k\cdot(k-1)\cdots 1 \\ 0! &:= 1 \end{aligned}}$$

$$T_{2,a=2} = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-2)^k$$

$$= \frac{f^{(0)}(2)}{0!}(x-2)^0 + \frac{f^{(1)}(2)}{1!}(x-2)^1 + \frac{f^{(2)}(2)}{2!}(x-2)^2$$

$$= \frac{f(2)}{1}\cdot 1 + \frac{f'(2)}{1}(x-2) + \frac{f''(2)}{2\cdot 1}(x-2)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{4}}{1}\cdot(x-2) + \frac{\frac{2}{8}}{2}\cdot(x-2)^2$$

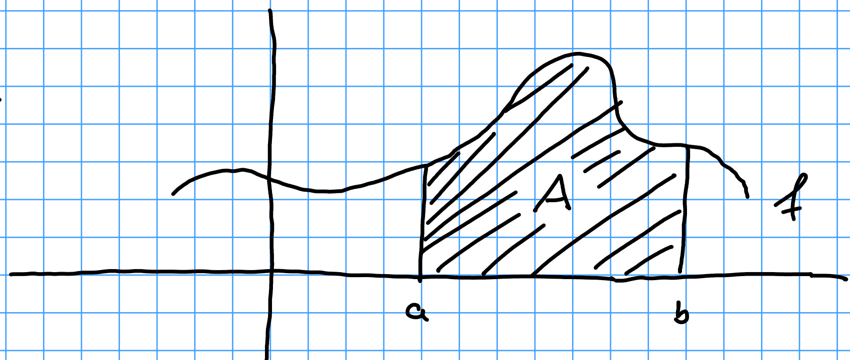
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(x-2)^2$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(x^2-4x+4)$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x^2}}$$

K2.7 Integration

Illustration



Frage: Was ist A?

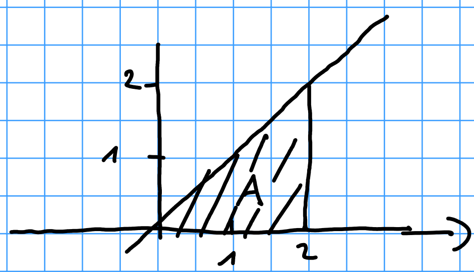
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Antwort: Falls $\boxed{F'(x) = f(x)}$ F heißt Stammfkt. von f

Dann $\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

(Hauptsatz der Differential und Integralrechnung)

1



$$A = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{2}}$$

$$f(x) = x$$

$$F(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$F'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot x = x = f(x)$$

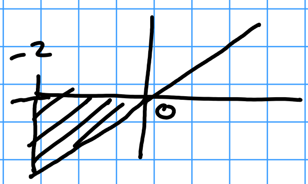
Dann $\int_0^2 x\,dx = F(2) - F(0)$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

2 Fläche unter der x-Achse wird negativ gezählt.

$$\int_{-2}^{0} x\,dx$$



$$= F(0) - F(-2) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{2}(-2)^2 = -\frac{4}{2} = \underline{\underline{-2}}$$

Schreibweisen:

Falls $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{unbestimmte Integral}$$

wichtige Stammfunktionen

	$f(x)$	$F(x)$
$n \neq -1$	x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
	$\cos(x)$	$\sin(x)$
	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
	e^x	e^x

Bsp: $\int x^5\,dx = \frac{1}{6}x^6 + C$

Regel 1 Linearität

$$\int \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 \cdot f_2(x)\,dx = \alpha_1 \int f_1(x)\,dx + \alpha_2 \int f_2(x)\,dx$$

Bsp:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3x^2 + \cos(x)\,dx = 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx$$

$$= 3 \cdot \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[\sin(x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)^3\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \left(\frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^3}{8} \right) + 1 - (-1)$$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{\pi^3}{\cancel{8}_4} + 2 = \underline{\underline{\frac{\pi^3}{4} + 2}}$$

Regel 2 Partielle Integration

$$G' = g$$

$$\int \underset{\downarrow}{f} \underset{\uparrow}{g} \, dx = f G - \int f' \cdot G \, dx$$

Bsp:

$$\int \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{\cos(x)} \, dx = x \cdot \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x) \, dx$$

$$= x \cdot \sin(x) - (-\cos(x)) + C$$

$$= \underline{\underline{x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C}}$$

Probe: $(x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c)' = (x \cdot \sin(x))' + (\cos(x))' + (c)'$

$$= \cancel{\sin(x)} + x \cdot \cos(x) - \cancel{\sin(x)} + 0$$

$$= x \cdot \cos(x) \quad \checkmark$$

(2)

$$\int_0^1 \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{e^x} \, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx$$

$$= 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - [e^x]_0^1$$

$$= e^1 - (e^1 - e^0) = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

Regel 3 Substitution

$$\int_a^b f(g(x)) \, g'(x) \, dx \underset{y = g(x)}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy$$

Bsp:

(1)
$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x \cdot \sin(x^2)\, dx \underset{\substack{u = x^2 \\ \frac{du}{dx} = 2x \\ dx = \frac{1}{2x} du}}{=} \int_{(\sqrt{\pi})^2}^{(\sqrt{2\pi})^2} \cancel{x} \cdot \sin(u) \frac{1}{2\cancel{x}}\, du$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} \sin(u)\, du = \frac{1}{2} \left[-\cos(u)\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\cos(u)\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\cos(2\pi) - \cos(\pi)\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(1 - (-1)\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2 = \underline{\underline{-1}}$$

(2) Unbestimmtes Integral

$$\int e^{\underline{2x+3}}\, dx \underset{\substack{u = 2x+3 \\ \frac{du}{dx} = 2 \\ \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du}}{=} \int e^u \frac{1}{2}\, du \,\Big|_{u = 2x+3}$$

$$= \frac{1}{2} e^u + C \,\Big|_{u=2x+3} = \frac{1}{2} e^{2x+3} + C$$

Probe:
$$\left(\frac{1}{2} e^{2x+3}\right)' = \frac{1}{2} \left(e^{2x+3}\right)'$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} e^{2x+3} \cdot \cancel{2} = e^{2x+3} \checkmark$$