Mathe Intensivkurs

mail@marcdiesse.de

Literatur: Brücken zur Mathematik Cornelsen
Hohloch et al.

K1 Mathematik Grundlagen

K1.1 Zahlenmengen und Rechenregeln

Aussagenlogik

„$\Leftrightarrow$": „genau dann wenn"

„$\Rightarrow$": „daraus folgt"

$$2x-1=3 \Leftrightarrow 2x=4$$
$$\Leftrightarrow x=2$$

$$x=2 \Rightarrow x^2=4$$
$$\not\Leftarrow$$

Mengen

Eine „Menge" ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten den „Elementen" der Menge.

Bsp: $M = \{\text{rot, schwarz, Apfel}\} = \{\text{Apfel, schwarz, rot}\}$

$M = \{2, 3, 5, 8\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Mengenoperationen

① $m \in M$ „ist Element von" z.B. $3 \in \{2,3,5\}$

$4 \notin \{2,3,5\}$

② $M_1 = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade} \}$

$= \{ 1, 3, 5, 7, \dots \}$

$M_2 = \{ n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n < 6 \} = \{ 3, 4, 5 \}$

③ $\emptyset = \{\}$

④ $M \subseteq N$ Teilmenge $\{2,3\} \subseteq \{2,3,5\}$

⑤ $M \cap N$ Schnittmenge $\{2,3\} \cap \{2,5\} = \{2\}$

⑥ $M \cup N$ Vereinigung $\{2,3\} \cup \{2,5\} = \{2,3,5\}$

⑦ $M \setminus N$ ohne $\{2,3,6,7\} \setminus \{3,6,8\}$

$= \{2,7\}$

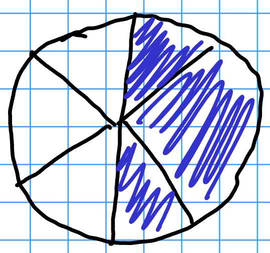
Zahlenmengen

- $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots \}$ = natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$ = ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{ p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$ = rationale Zahlen
- $\mathbb{R}$ = „alle Zahlen" = $\mathbb{Q} \cup \underbrace{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}_{\text{irrat. Zahlen}}$
- $\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \}$ komplexe Zahlen

K 1.2 Bruchrechnen (rationale Zahlen) $\mathbb{Q}$

Bsp: $\frac{3}{6}$ Zähler / Nenner $= 3:6$

$= 1/2$



Erweitern / Kürzen

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$ (s.o) „Erweitern"

Andersrum

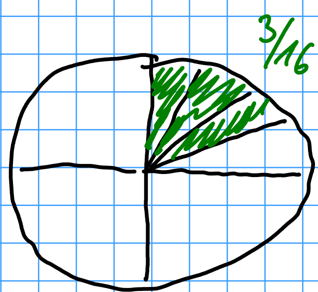
$\frac{6}{8} = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{4 \cdot \cancel{2}} = \frac{3}{4}$

Rechenoperationen

Mal „·" $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12} = \frac{1 \cdot \cancel{2}}{6 \cdot \cancel{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

Anschaulich: Mal bedeutet von

$\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{4}$



$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

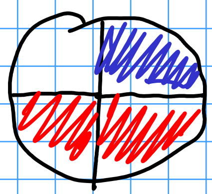
Prozent: 30% von 210 $\hat{=}$ $\frac{30}{100} \cdot 210$

$$\frac{3\cancel{0}\cdot 21\cancel{0}}{1\cancel{00}} = \frac{3\cdot 21}{1} = \underline{\underline{63}}$$

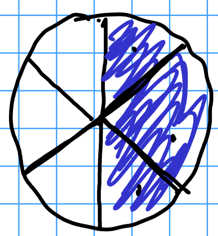
$$\parallel$$

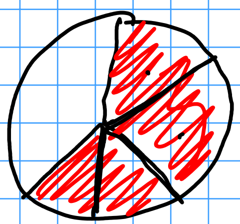
$$\frac{3\cdot\cancel{10}\cdot 21\cdot\cancel{10}}{\cancel{10}\cdot\cancel{10}}$$

Plus „+" $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1+2}{4}=\frac{3}{4}$



verschiedene Nenner $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$





Nenner gleich machen:

einfach: $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{1\cdot 9}{6\cdot 9}+\frac{1\cdot 6}{9\cdot 6}$

$$=\frac{9}{54}+\frac{6}{54}=\frac{15}{54}=\frac{5}{18}$$

elegant:
Hauptnenner
ist kgV

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{1\cdot 3}{6\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{9\cdot 2}$$

$$=\frac{3}{18}+\frac{2}{18}=\frac{5}{18}//$$

kgV: $6 = 2 \cdot 3$
$9 = 3 \cdot 3$
$\Rightarrow$ kgV $= 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$

K1.3 Rechnen mit reellen Zahlen

• Reihenfolge: Klammer vor punkt vor strich

$$2 + 3 \cdot (1+2) = 2 + 3 \cdot 3 = 2 + 9 = 11$$

• Additives Inverse (Minus)

$$2 - 3 := 2 + (-3) = 2 + (-1) \cdot 3$$

• Assoziativgesetz

$$(a+b)+u = a + (b+u) =: a + b + u$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Hinweis: Mit Variablen häufig $2 \cdot a \cdot b$
$= 2ab$

Bsp: 1 $(5+2)+1 = 5 + (2+1)$
2 $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$
$6 \cdot 4 = 2 \cdot 12$
3 $3+5+7 = (3+5)+7$
4 $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$

• Kommutativgesetz

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Bsp: 1 $2+3 = 3+2$
2 $2-3 = 2+(-3)$
$= (-3) + 2$
3 $2-3 \neq 3-2$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

(4) $3a + 5c - (3+8d)$

$= a \cdot 3 - (3+8d) + 5c$

(5) $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}$

$= \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1}{5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 1$

$= \frac{2}{5}$

$\boxed{\text{• Distributivgesetz}}$

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

<u>Bsp:</u> (1) $3 \cdot (2+5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5$

(2) $(a+b)(2a-b) = (a+b) \cdot 2a + (a+b) \cdot (-b)$

$= 2a \cdot a + 2a \cdot b + (-b) \cdot a + (-b) \cdot b$

$= 2a^2 + 2ab - ab - b^2$

$= 2a^2 + (2-1) \cdot a \cdot b - b^2$

$= 2a^2 + ab - b^2$

(3) $2 - (3+2-7) = 2 + (-1) \cdot (3+2-7)$

$= 2 + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot (-7)$

$= 2 - 3 - 2 + 7$

$= 2 - 5 + 7 = \underline{\underline{4}}$

<u>Beispiel aufgabe</u>

Folgenden Term vereinfachen

$4(3a - 2(3b+a) + 3c) \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$= 4\,(3a + (-2)\cdot 3b + (-2)\cdot a + 3c)$

Distributivgesetz

$= 4\,(3a - 6b - 2a + 3c)$

$= 4\,(3a - 2a - 6b + 3c)$

Kommutativgesetz

$= 4\,(a\,(3-2) - 6b + 3c)$

Distributivgesetz

$= 4\cdot(a\cdot 1 - 6b + 3c)$

$= 4\cdot a - 4\cdot 6\cdot b + 4\cdot 3\cdot c \quad = \underline{\underline{4a - 24b + 12c}}$

Distributivgesetz

K1.4 Binomische Formeln

- $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b$
  $= a^2 + ab + ab + b^2$
  $= \underline{\underline{a^2 + 2ab + b^2}}$

- $(a-b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$
  $= \underline{\underline{a^2 - 2ab + b^2}}$

- $(a-b)(a+b) = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$

Bsp:

① $(\underbrace{2x}_{a} + \underbrace{3y}_{b})^2 = (2x)^2 + 2\cdot(2x)\cdot(3y) + (3y)^2$

$= 2x\cdot 2x + 12xy + 9y^2$

$= \underline{\underline{4x^2 + 12xy + 9y^2}}$

② $(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)\cdot c + c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

③ $(x^4 - y^4) = ((\underbrace{x^2}_{a})^2 - (\underbrace{y^2}_{b})^2) = (x^2-y^2)(x^2+y^2)$

$= (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

K1.5 Potenzen und Wurzeln

$a, b \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$

$n \geq 1 \qquad a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \,..\, \cdot a}_{n\text{-mal}}$

Exponent, Basis

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots}_{n\text{-mal}}}$

Regeln

- $\boxed{\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ a^n \cdot b^n &= (ab)^n \end{aligned}}$

z.B. ① $2^2 \cdot 2^3 = 2\cdot 2 \cdot 2\cdot 2\cdot 2$

$= 2^{2+3} = 2^5 = 32$

② $3^2 \cdot 5^2 = 3\cdot 3 \cdot 5\cdot 5$

$= 3\cdot 5 \cdot 3\cdot 5 = (3\cdot 5)^2$

$\boxed{\text{Vorsicht!}}$ $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

z.B. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\boxed{\bullet \; \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}}$$

z.B. $(2^2)^3 = (2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2)$
$= 2^6 = 2^{2\cdot 3}$

$\bullet \; \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n}$
$= a^{m+(-n)} = a^{m-n}$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Bsp: ① $\left((-2)^2\right)^{-3} = (4)^{-3} = \frac{1}{4^3}$
$= \frac{1}{64}$

oder $(-2)^{2\cdot(-3)} = (-2)^{-6}$
$= \frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{64}$

② $\frac{1}{a^{-3}} = a^{-(-3)} = a^3$

- Wurzeln bzw. Potenzen mit rationalen Exponenten

$a \in \mathbb{R},\; a > 0$

$b = \sqrt[n]{a} \iff b^n = a$

$n = 2$ heißt Quadratwurzel

Bsp: $\sqrt[2]{16} = 4 \iff 4^2 = 16$

$\sqrt[3]{8} = 2 \iff 2^3 = 8$

Wichtig: $\sqrt{a^2} = |a|$

z.B. $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$
$\neq -2$

Potenzschreibweise

$$a^{1/n} := \sqrt[n]{a} \qquad a^{m/n} := \left(a^{1/n}\right)^m = \left(a^m\right)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Rechenregeln wie ob.

z.B. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a^{1/2} \cdot b^{1/2} = (a \cdot b)^{1/2} = \sqrt{ab}$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} = \frac{a^{1/2}}{b^{1/2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Vorsicht $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Beispiele

$$0{,}003 = 3 \cdot \frac{1}{1000} = 3 \cdot \frac{1}{10^3} = \underline{\underline{3 \cdot 10^{-3}}}$$

$$7 \cdot 10^{-4} = \quad 7$$

$7 \cdot 10^{-4} = 0{,}0007$

$7 \cdot 10^{2} = 700{,}0 = 700$

Bsp:

$$\sqrt{4 \cdot (x^2+1)^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{(x^2+1)^2} = 2 \cdot |x^2+1|$$
$$= \underline{\underline{2 \cdot (x^2+1)}}$$

K 1.6 Summennotation

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots \; a_n$$

$\uparrow$ Laufvariable

z.B. $\boxed{\sum_{k=1}^{4} \underbrace{k^2}_{a_k} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4}$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$
$$= \boxed{1 + 4 + 9 + 16} = \underline{\underline{30}}$$

Beispiele

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots \; n$ (Gaußsche Summe)

2. $\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + \ldots + 100$

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + \ldots + 100 \\ + 100 + 99 + \ldots + 1 \\ \hline 101 + 101 + \ldots + 101 \end{array}$$

$$= 100 \cdot 101$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = \underline{\underline{5050}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

2 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$= e^x$ (Exponentialreihe)

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

$0! = 1$