K 4.1 Komplexe Zahlen

Warum? $x^2+1=0$ hat keine Lsg in $\mathbb{R}$

Wollen $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + .. + a_0 = 0$ hat n Lösungen mit Vielfachheiten.

Deswegen „komplexe Zahlen"

$$\mathbb{C} = \{ \underline{a + i \cdot b} \mid a, b \in \mathbb{R} \}, \qquad \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$
$$\text{mit } i^2 = i \cdot i = -1$$

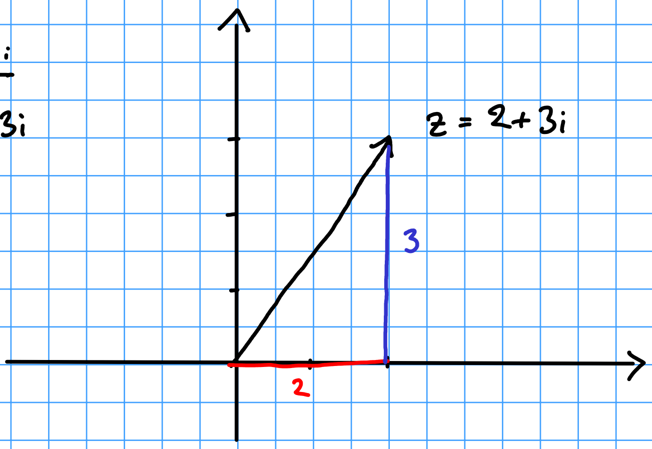
Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ ist

$Re(z) = a$ <u>Realteil</u> von z

$Im(z) = b$ <u>Imaginärteil</u> von z

Beispiel:

$z = 2+3i$



Gauß'sche Zahlenebene

Rechnen in $\mathbb{C}$

„genauso wie in $\mathbb{R}$ mit $i^2 = -1$"

Also z.B.

① Addition $(2+3i) + (1+5i) = 2+1 + 3i + 5i$
$= \underline{3 + 8i}$

② Multiplikation $(1+2i) \cdot (2+3i) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3i + 2i \cdot 2 + 2i \cdot 3i$

$$= 2 + 3i + 4i + 6 \cdot i^2$$

$$= 2 + 7i + 6 \cdot (-1) = 2 - 6 + 7i = \underline{-4 + 7i}$$

③ gemischt

$$(-1 + 2i) \cdot i + 3 \cdot i - 2 = -1 \cdot i + 2i \cdot i + 3i - 2$$

$$= -i + 2 \cdot i^2 + 3i - 2$$

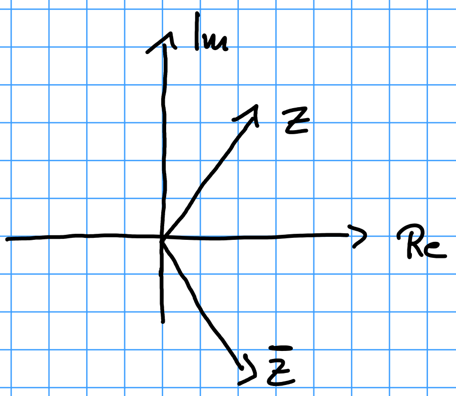
$$= -i - 2 + 3i - 2$$

$$= \underline{-4 + 2i}$$

④ Neu:

$z = a + ib$, $\quad \bar{z} = a - ib \quad$ Komplex konjugiert

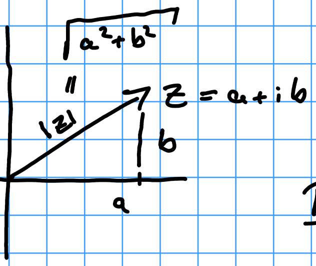
z.B. $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$



⑤ Betrag

$z = a + ib$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ = „Länge des Pfeils“



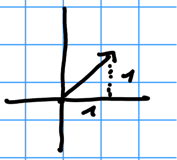
$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Bsp:

$$|2 + 0 \cdot i| = \sqrt{2^2} = 2$$

$$|2i| = \sqrt{2^2} = 2$$

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



⑥ Division

$$\frac{3 + 4i}{1 + 2i} = \frac{3 + 4i}{1 \textcircled{+} 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 \textcircled{-} 2i} = \frac{(3 + 4i) \cdot (1 - 2i)}{(1 + 2i) \cdot (1 - 2i)}$$

$$= \frac{3 - 6i + 4i - 8i^2}{1 + \cancel{2i} - \cancel{2i} - 4i^2} = \frac{3 - 6 \cdot i + 4 \cdot i - 8 \cdot i^2}{1 - 4 \cdot i^2}$$

$$= \frac{3 + i(4 - 6) - 8 \cdot (-1)}{1 - 4 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{11 - 2i}{5} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5} i$$

Bsp: $x^2 - 2x + 5 = 0$ hat im Reellen keine Lsg

Diskriminante < 0

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm i \cdot 4}{2} = \frac{2}{2} \pm i \cdot \frac{4}{2}$$

$$= 1 \pm i \cdot 2$$

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 1 - 2i$$

Probe:

$$(1+2i)^2 - 2 \cdot (1+2i) + 5 = 1^2 + 2 \cdot 2i + (2i)^2 - 2 - 4i + 5$$

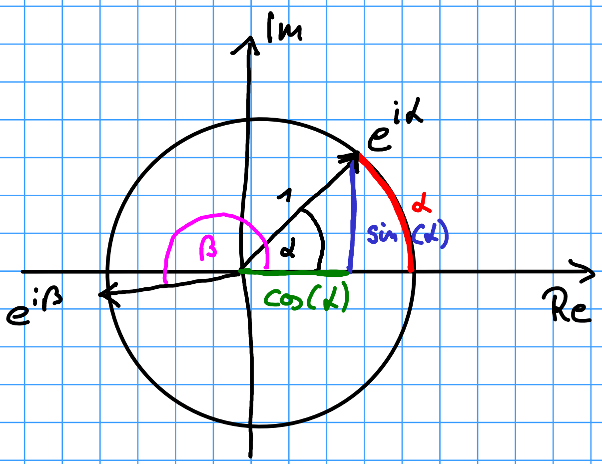
$$= 1 + 4i + 4 \cdot i^2 - 2 - 4i + 5$$

$$= 1 + 4i - 4 - 2 - 4i + 5$$

$$= 6 - 6 + 4i - 4i = 0$$ ✓

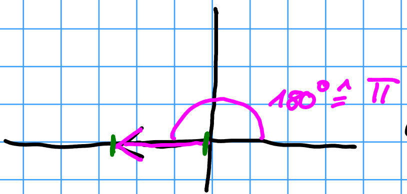
Exponentialfkt

$$\boxed{e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)}$$



Einschub: Bogenmaß

α Grad	Bogenmaß (rad)	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
360°	2π		
180°	π	-1	0
90°	$\pi/2$	0	1
60°	$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
30°	$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
x°	$\frac{x}{360} \cdot 2\pi$	TR	TR

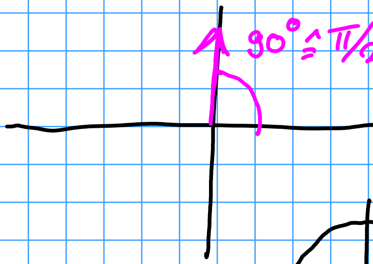


$e^{\pi i} = -1$

$-1 + 0 \cdot i$

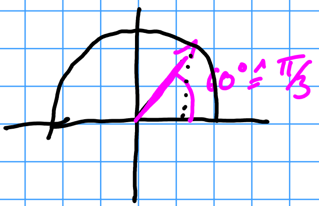
$\Rightarrow e^{\pi i} + 1 = 0$ $\boxed{\text{Euler Formel}}$

siehe Homepage
Dokumente → wichtige Werte von sin/cos
→ Polarkoordinaten

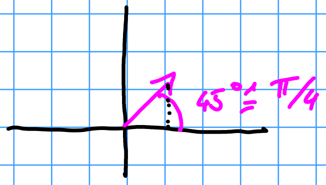


$e^{\pi/2\, i} = i$

$= 0 + 1 \cdot i$



$$e^{\pi/3 \cdot i} = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$e^{\pi/4 \cdot i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

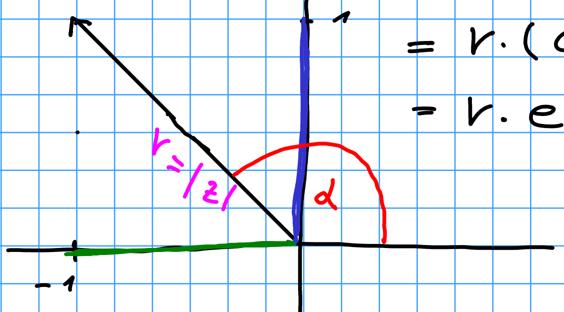
Polarkoordinaten

Bsp:

$z = -1 + 1i = r \cdot \cos(\alpha) + i \cdot r \cdot \sin(\alpha)$

$= r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$

$= r \cdot e^{i\alpha}$



Bsp: Hier ①

$z = \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha) + i \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\alpha) = \sqrt{2} \cdot \cos(\frac{3}{4}\pi) + i \cdot \sin(\frac{3}{4}\pi)$

$= \sqrt{2} e^{i \frac{3}{4}\pi}$

② $$\frac{\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3}{4}\pi}}{5\cdot e^{i\cdot\pi}} = \frac{\sqrt{2}}{5}\cdot e^{i\frac{3}{4}\pi - i\pi} = \frac{\sqrt{2}}{5}\cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i}$$

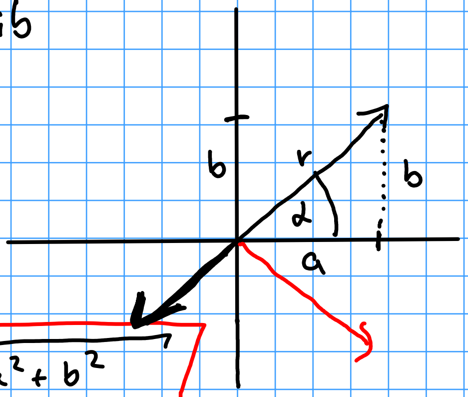
Umrechnung Polardarstellung → kartesische Darstellung

$$z = r\cdot e^{i\alpha} = \underbrace{\cos(\alpha)\cdot r}_{Re(z)} + i\cdot \underbrace{\sin(\alpha)\cdot r}_{Im(z)}$$

klar

Umrechnung kartesische Darstellung → Polarkoord.

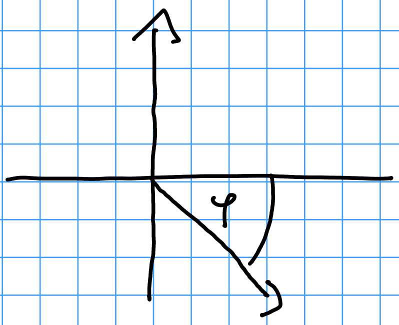
$z = a + ib$



$$\boxed{r = \sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & a < 0 \\ \pi/2 & z = ib, b > 0 \\ -\pi/2 & z = ib, b < 0 \end{cases} = \operatorname{atan2}(a, b)$$

Bsp: $z = 1 - i$



$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\varphi = -45° = -\pi/4$

$= \arctan\left(\frac{-1}{1}\right)$

K4.2 Lineare Algebra

In der lineare Algebra geht es um Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Bsp

$$\begin{aligned} 3\boxed{x_1} + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 1x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Gegenbsp.

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &= \sin(y) \\ z &= x \end{aligned}\right. \downarrow$$

nichtlineares GLS

Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

2×3 Matrix $\downarrow$ $\rightarrow$

Matrix Operationen

Bsp: $A = \begin{pmatrix} \bigcirc\!\!\!\!1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2×2 Matrix, $B = \begin{pmatrix} \bigcirc\!\!\!\!0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2×2 Matrix

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2×3 Matrix A,B quadratische Matrizen

Addition:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 \\ 3+1 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$A - B$ analog

$\cancel{A - C}$ geht nicht! (nicht definiert)

Multiplikation mit Skalar

$$5 \cdot C = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 & 0\cdot 5 & 2\cdot 5 \\ 0\cdot 5 & 3\cdot 5 & 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

Multiplikation

$$A\cdot C = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&1\end{pmatrix}$$

„lege Zeile auf Spalte"

$$(1\ \ 2)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot1+2\cdot0 = 1$$

$$= \begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot0+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot1\\ 3\cdot1+4\cdot0 & 3\cdot0+4\cdot3 & 3\cdot2+4\cdot1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&6&4\\3&12&10\end{pmatrix}$$

geht nur Falls Zeilänge von A
= Spaltenlänge von B !

z.B. $C\cdot A = \cancel{\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}$ geht nicht!

„Falls beides geht muss nicht dasselbe sein"

$$A\cdot B = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$$

Kommutativgesetz gilt nicht!

Spezielle Matrizen

① $N = \begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\\ 0&&0\end{pmatrix}$ Nullmatrix

② $E = \underbrace{\begin{pmatrix}1&\ddots&0\\0&&1\end{pmatrix}}_{n} n$ Einheitsmatrix Bsp $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = E_3$

Falls A $n\times n$ Matrix dann $A\cdot E = A = E\cdot A$

Bsp $\begin{pmatrix}2&3&5\\1&7&1\\0&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}2&3&5\\1&7&1\\0&2&3\end{pmatrix}$$

③ Hat A die Form

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ 0 & a_2 & * & * & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & \end{pmatrix}$$

dann hat A Zeilenstufenform (ZSF)

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat ZSF

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat ZSF

Determinanten

Sei A $n \times n$-Matrix. Dann

$\det A \in \mathbb{R}$ nützliches Hilfsmittel bei Lsg. von LGS

Bsp: ① $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 2×2 Matrix

Allg. $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$\det A = 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = \underline{\underline{-10}}$

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3×3 Matrix

Regel von Sarrus

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 5 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\det A = 1 \cdot 7 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 \cdot 0$$
$$- (-2) \cdot 7 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 0$$

$$= 7 + 6 \cdot 7 = 7 \cdot 7 = \underline{\underline{49}}$$

③ $n \times n$-Matrix siehe Entwicklungssatz von Laplace

Lineare Gleichungssysteme

Bsp:

①
$$\begin{aligned} -x + y + z &= 0 \\ x - 3y - 2z &= 5 \\ 5x + y + 4z &= 3 \end{aligned} \iff A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) I + II$$
$$\underbrace{}_{A}$$

Falls alle 0
dann homogenes LGS
sonst inhomogen.

zum Lösen bringe A in ZSF mit Gauß-Algorithmus

Erlaubt sind Zeilen Umformungen
und Zeilen Tauschen

$\rightsquigarrow$ Ersetze 2. Zeile durch 1+2 Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) III + 5 \cdot I$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \end{array} \right) III + 3 \cdot II$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{aligned} -1\, x_1 + 1\, x_2 + 1 \cdot x_3 &= 0 \\ -2\, x_2 - 1\, x_3 &= 5 \\ 6\, x_3 &= 18 \iff x_3 = \frac{18}{6} = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

$x_3 = 3$ in II eingesetzt

$$-2 \cdot x_2 - 1 \cdot 3 = 5 \iff -2\, x_2 = 5 + 3$$

$$\iff -2\, x_2 = 8 \iff \underline{\underline{x_2 = -4}}$$

$x_3=3, x_2=-4$ in I eingesetzt

$$-1x_1 + 1\cdot(-4)+1\cdot 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -x_1 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \underline{\underline{-1}}$$

$$\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}\right\}$$

Probe $\quad A\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\boxed{-1 \quad 1 \quad 1}\\ 1 \quad -3 \quad -2\\ 5 \quad 1 \quad 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Satz für quadratische LGS

$$\text{n Zeilen}\left\{\left(\begin{array}{c|c} a_{11}x_1+\dots \qquad a_{1n}x_n & b_1\\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{a_{n1}x_1+\dots \qquad a_{nn}x_n}_{n \text{ Variablen}} & b_n\end{array}\right)\right.$$

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ LGS hat genau eine Lsg.

$\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ A ist singulär

$\Leftrightarrow \quad$ LGS hat keine

oder ∞-viele Lsg.

bei homog. LGS ∞ viele Lsg.

Bsp ② ①

$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$3x_1 + 6x_2 = 4$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ } $\det A = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 3 & 6 & | & 4 \end{pmatrix} \; II - 3I \; \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad x_1 + 2x_2 = 3$$
$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = -5$$

$\Longleftrightarrow$ hat keine Lsg

$$\mathbb{L} = \{\}$$

②

$$x_1 + 2x_2 = 2$$
$$3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 6$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 2 \\ 3 & 6 & | & 6 \end{pmatrix} \; II - 3 \cdot I$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad x_1 + 2x_2 = 2$$

$x_1 = r$

$$\rightsquigarrow \quad r + 2x_2 = 2$$

$$\rightsquigarrow \quad x_2 = \frac{2 - r}{2} = 1 - \tfrac{1}{2} r$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 1 - \frac{1}{2} r \end{pmatrix} \middle| \, r \in \mathbb{R} \right\}$$

Probe $r = 2$ $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ ✓

③ $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 2 \end{array}\right) \quad III - 2II$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \overset{\downarrow}{2} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow x_4 = 2$

$\underset{\text{Eingesetz in } II}{\rightsquigarrow}$ $x_3 + 2 = 0 \Rightarrow x_3 = -2$

$\underset{\text{Eingesetzt in } I}{\rightsquigarrow}$ $x_1 + 2x_2 + 2\cdot(-2) + 1(2) = 1$

$\Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - 4 + 2 = 1$

$\Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - 2 = 1$

$\Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 3$

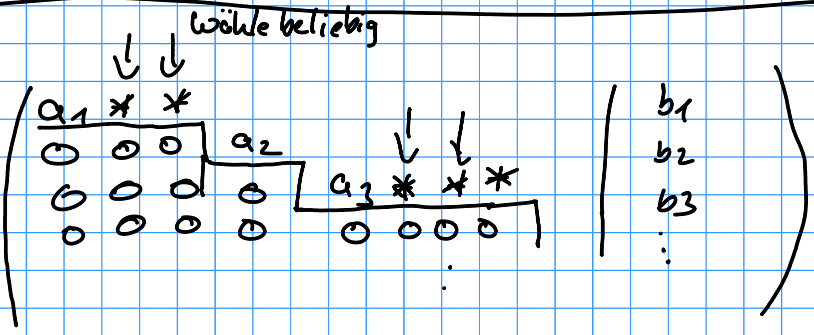
Wähle

$x_2 = r \Rightarrow x_1 + 2r = 3$

$\Rightarrow x_1 = 3 - 2r$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3-2r \\ r \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| r \in \mathbb{R} \right\}$$

Allg.



$a_1, a_2, a_3 \neq 0$

Inverse Matrix

A quadratische , $\det A \neq 0$

Dann ex. Inverse A^{-1} von A mit $A^{-1}A = E$

Bsp:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)_{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)^{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

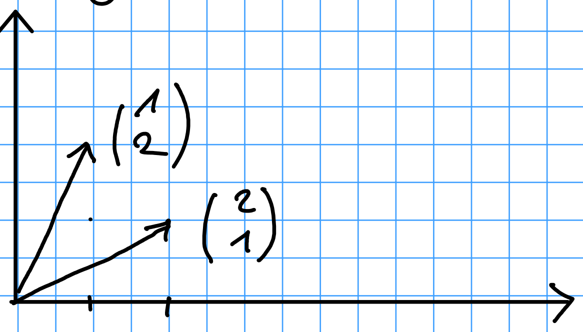
Probe $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

S. 4. 2 Vektorrechnung und analytische Geometrie

Vektoren : Vektoren sind $n \times 1$ Matrizen

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Falls ein KS gegeben ist haben wir folgende Anschauung eines Vektors als Pfeil.



Wichtig ist nur Länge und Richtung nicht Startpunkt

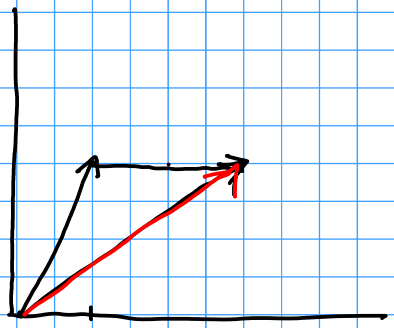
Schreibweise

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 1, 2 sind Koordinaten des Vektors

Vektoroperationen wie bei Matrizen

Skalierung: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Skalar}}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Addition $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \\ 2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

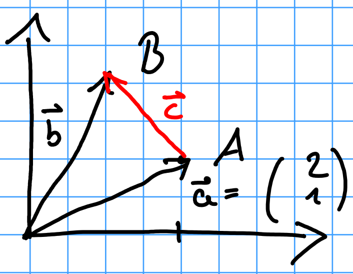


Betrag $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2}$

ist Länge des Vektors

Punkte<->Vektoren

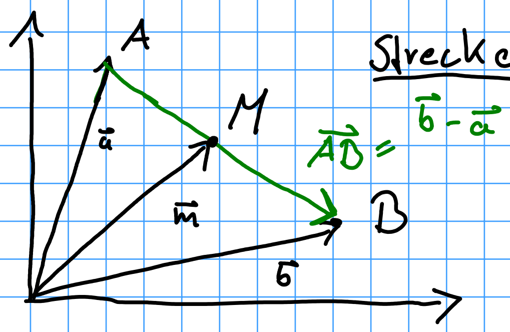
Punkte im Raum, Fläche sind gegeben
durch Ortsvektoren im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$



Verschiebung $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{c}$

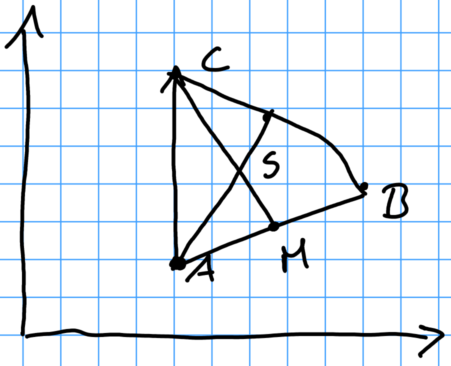
Erste Anwendungen

Streckenmittelpunkt



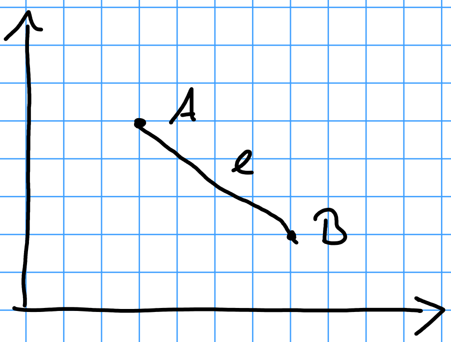
$$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$$
$$= \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$
$$= \vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

Schwerpunkt im Dreieck



$$\vec{s} = \vec{m} + \frac{1}{3}\vec{MC}$$
$$= \vec{m} + \tfrac{1}{3}(\vec{c} - \vec{m})$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \tfrac{1}{3}\left(\vec{c} - \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{6}\vec{a} - \tfrac{1}{6}\vec{b}$$
$$= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

Abstand



$$\ell = |\vec{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}|$$

Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \ell = |\vec{b} - \vec{a}|$

$$= \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Das Skalarprodukt

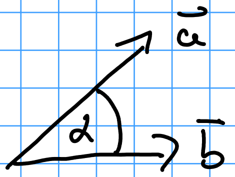
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3$$

$$= 0 + 2 + 3$$

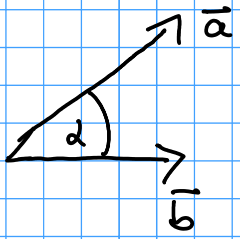
$= 5$ ist Skalar

im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

Bsp: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\alpha = \pi/4 \mathrel{\hat{=}} 45°$

$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|\vec{b}| = 1$

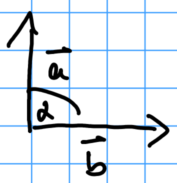
$|\vec{a}| = \sqrt{1+1}$

$= \sqrt{2}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$ ✓

Orthogonale Vektoren



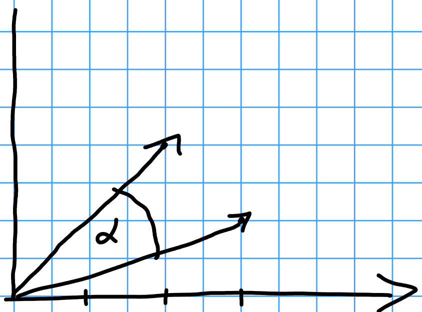
$\alpha = \pi/2 \mathrel{\hat{=}} 90°$ Dann $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec a \cdot \vec b = |\vec a| \cdot |\vec b| \cdot \cos(\alpha) = 0$$

weil $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

Winkelberechnung Bsp:

$\vec a = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \vec b = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$



$$\vec a \cdot \vec b = 3\cdot 2 + 2\cdot 1 = 8 \overset{!}{=} |\vec a| \cdot |\vec b| \cdot \cos(\alpha)$$

$$= \sqrt{3^2+1^2} \cdot \sqrt{2^2+2^2} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 8 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{8} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{8}{\sqrt{80}} = \frac{8}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{20}} = \frac{8}{2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}$$

$$= \frac{8}{4\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\underset{TR}{\Longrightarrow} \quad \alpha \approx \underline{\underline{26,57^\circ}}$$

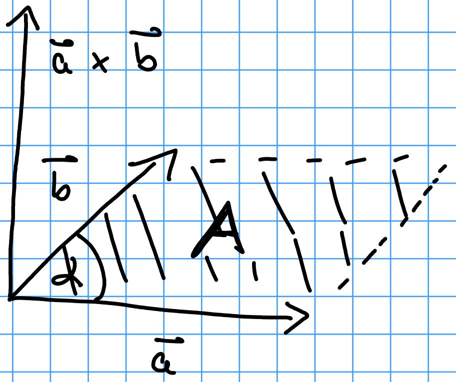
Das Kreuzprodukt

nur in $\mathbb{R}^3$

$$\overset{\vec a}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}}} \times \overset{\vec b}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix}1\cdot 2 - 5\cdot 1\\ 1\cdot 1 - 2\cdot 2\\ 2\cdot 5 - 1\cdot 1\end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{matrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\\ 2\\ 1\end{matrix} \times \begin{matrix}\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}\\ 1\\ 5\end{matrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\9\end{pmatrix}$$



Flächeninhalt A

Eigenschaften:

① $\vec{a} \times \vec{b} \perp a$

$\vec{a} \times \vec{b} \perp b$

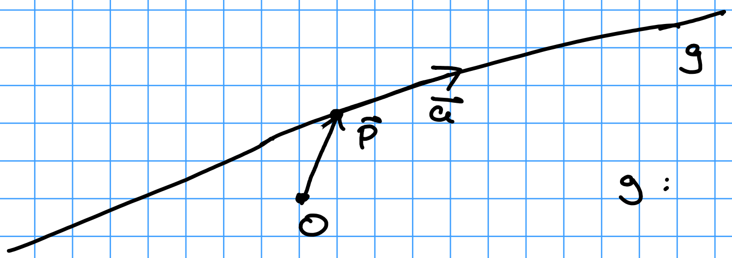
rechte Hand Regel
$\vec{a}$ Daumen
$\vec{b}$ Zeigefinger
$\vec{a} \times \vec{b}$ Mittelfinger

② $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha) = A$

③ $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

Weitere Anwendungen

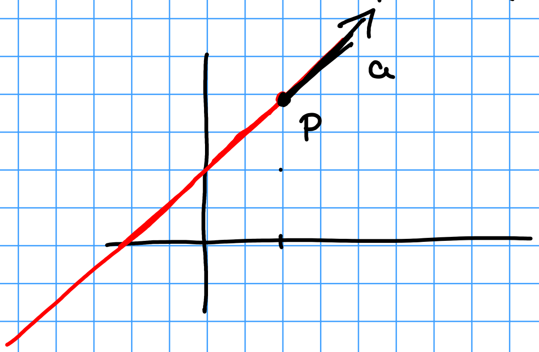
① Geraden def.



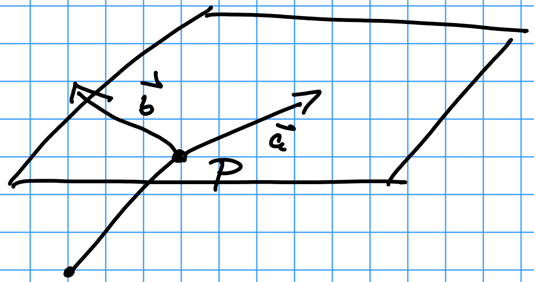
g : $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{a}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

z.B. $\vec{p} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$



② Ebenen def.

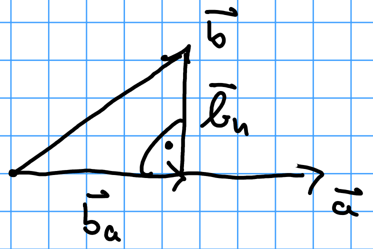


E: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

$\vec{p} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Ebene in Höhe 2

orthogale Projektion



$\vec{b_n} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{b_n} \cdot \vec{a} = 0$

$\vec{b} = \vec{b_a} + \vec{b_n}$

$\vec{b_a} = \lambda \cdot \vec{a}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot (\vec{b_a} + \vec{b_n}) = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{a} + \vec{b_n})$$

$$= \lambda \cdot \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{a})}_{|\vec{a}|^2} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b_n}}_{=0} = \lambda \cdot |\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \qquad \Rightarrow \vec{b_a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

Abstände

$\vec{Q}$ zu $g : \vec{x} = p + \lambda \vec{a}$

①

$$d = \frac{| \vec{a} \times (\vec{q} - \vec{p}) |}{|\vec{a}|}$$

② Abstand Q zu $E : \vec{x} = p + \lambda \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

$$d = \frac{| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{q} - \vec{p}) |}{| \vec{a} \times \vec{b} |}$$