

Komplexe Zahlen

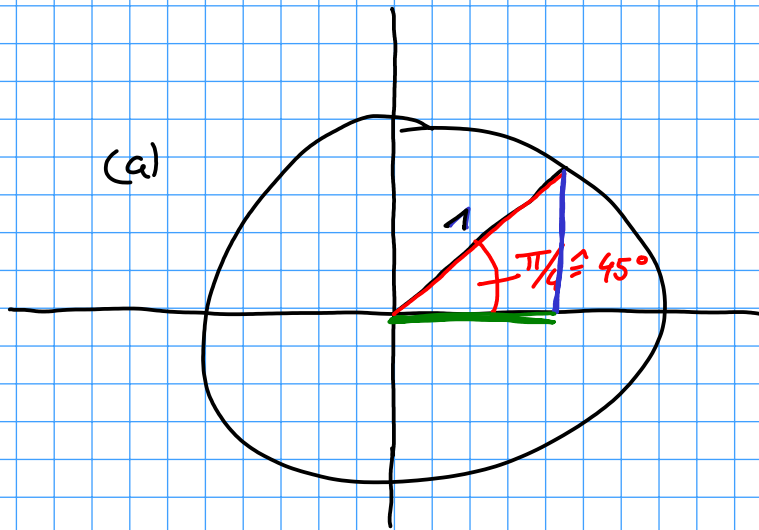
Aufgabe 1

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad z_1 \cdot z_2 + 5 &= (1+3i) \cdot (2-i) + 5 \\ &= 2 - i + 6i + (3i) \cdot (-i) + 5 \\ &= 2 + 5i - 3 \cdot i^2 + 5 = 2 + 3 + 5 + 5i \\ &= \underline{\underline{10 + 5i}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \frac{z_1^2}{z_2} &= \frac{(1+3i)^2}{2+i} = \frac{(1+3i)^2 \cdot (2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{(1+6i+9i^2)(2-i)}{4+2i-2i-i^2} = \frac{(-8+6i) \cdot (2-i)}{4+1} \\ &= \frac{-16+8i+12i-6i^2}{5} = \frac{-10+20i}{5} \\ &= \underline{\underline{-2+4i}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad z_2 \cdot i^{10} &= (2-i) i^{10} = (2-i) \cdot (i^2)^5 \\ &= (2-i) \cdot (-1)^5 \\ &= (2-i) \cdot (-1) = \underline{\underline{-2+i}} \end{aligned}$$

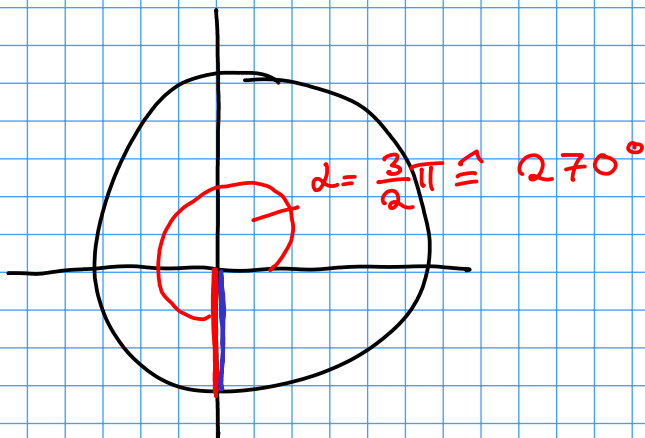
Aufgabe 2



$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

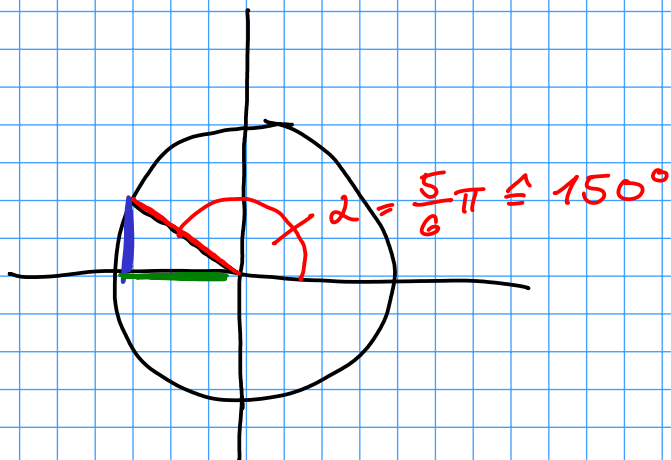
(b)



$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$$

(c)



$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aufgabe 3

$$4z^2 - 6z + 5 = 2z$$

$$\Leftrightarrow 4z^2 - 8z + 5$$

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{+8 \pm \sqrt{64 - 80}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{-16}}{8} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{-1} \sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm i4}{8} \\ &= 1 + \frac{1}{2}i, 1 - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ 1 + \frac{1}{2}i, 1 - \frac{1}{2}i \right\}$$

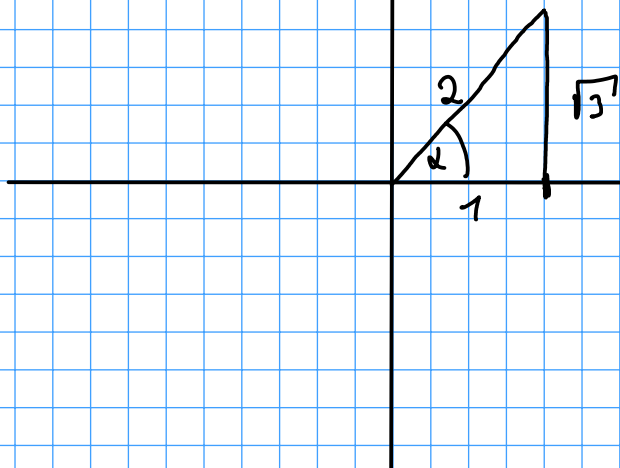
Aufgabe 4

$$\begin{aligned} z^4 &= \left(\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi \cdot i} \right)^8 = \left(\sqrt{2} \right)^8 \cdot \left(e^{\frac{3}{4}\pi \cdot i} \right)^8 \\ &= \left(\left(\sqrt{2} \right)^2 \right)^4 \cdot e^{\frac{3}{4}\pi \cdot i \cdot 8} = 2^4 \cdot e^{3\pi \cdot i \cdot 2} \\ &= 16 \cdot e^{6\pi i} = 16 \\ &\quad \uparrow \end{aligned}$$

$$6\pi = 3 \cdot 2\pi \hat{=} 3 \cdot 360^\circ$$

(b)

$$\omega = 1 + \sqrt{3}i$$



$$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}$$
$$= 2$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \hat{=} 60^\circ$$

$$\text{Also } \omega = 2 \cdot e^{\pi/3}$$

$$\Rightarrow \omega^6 = 2^6 \cdot e^{\pi/3 \cdot 6}$$

$$= 64 \cdot e^{2\pi} = 64 \cdot 1 = \underline{\underline{64}}$$

Aufgabe 5

Hintergrund: Mit Hilfe komplexer Zahlen kann die Berechnung von Wechselstromnetzwerken auf die Berechnungsmethoden von Gleichstromnetzwerken reduziert werden. Beispielsweise kann für sinusförmige Spannungen und Ströme

$$u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t) \quad , \quad i(t) = i_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

das Ohmsche Gesetz $R = \frac{u}{i}$ nicht verwendet werden,

da $i(t)$ den Wert 0 annimmt und der Quotient $\frac{u}{i}$, falls definiert, nicht konstant ist.

In der komplexen Wechselstromrechnung ersetzt man die sinusförmigen Spannungen und Ströme durch komplexe $\mathbb{1}$ rezeigen

$$u_c(t) = u_0 \cdot e^{j\omega t} \quad i_c(t) = i_0 \cdot e^{(j\omega t + \varphi)}$$

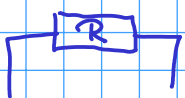
Der Begriff des Widerstands wird durch die Impedanz ersetzt:

$$Z_c = R + j \cdot X$$

mit dem sogenannten Wirkwiderstand R und dem Blindwiderstand X

Beispielsweise im Wechselstromkreis mit Frequenz f und $\omega = 2\pi f$:

ohmscher Widerstand



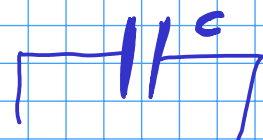
$$Z_c = R + j \cdot 0$$

ideale Spule



$$Z_c = 0 + j\omega L$$

Kondensator



$$Z_c = 0 - j \frac{1}{\omega C}$$

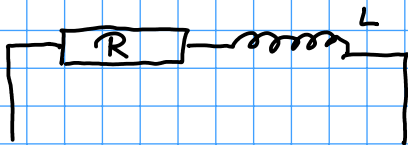
Mit Impedanz Z_c , Spannung u_c und Strom i_c gelten dann das Ohmsche Gesetz

$$u_c = Z_c \cdot i_c$$

und die Regeln für Serien/Parallelschaltungen

wie in Gleichstromnetzwerken

$$(a) \quad u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) = 10 \cdot \sin(\omega t) \quad \text{mit } \omega = 2\pi \cdot 50 = 100\pi$$
$$\Rightarrow u_c(t) = 10 \cdot e^{j\omega t}$$



$$\text{Serienschaltung} \Rightarrow Z_c = R + 0j + 0 + j \cdot \omega \cdot L$$
$$= R + j \cdot \omega \cdot L = 2 + j \cdot \omega \cdot 4 \cdot 10^{-3}$$
$$= 2 + j \cdot \frac{4\omega}{1000}$$

Stromberechnung:

$$u_c = Z_c \cdot i_c \Rightarrow i_c = \frac{u_c}{Z_c} = \frac{10 \cdot e^{j\omega t}}{2 + j \cdot \frac{4\omega}{1000}}$$

Polarschreibweise von Z_c :

$$r = \sqrt{2^2 + \left(\frac{4 \cdot 100\pi}{1000}\right)^2} = \sqrt{4 + \left(\frac{4\pi}{10}\right)^2} \approx 2,36$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{4\pi}{2 \cdot 10}\right) \approx 0,56$$

$$\Rightarrow Z_c \approx 2,36 \cdot e^{j \cdot 0,56}$$

$$\text{Also } i_c(t) = \frac{u_c(t)}{Z_c(t)} \approx \frac{10 \cdot e^{j\omega t}}{2,36 \cdot e^{j \cdot 0,56}} \approx 4,26 \cdot e^{j(\omega t - 0,56)}$$

Damit:

$$i(t) = \underline{\underline{4,26 \cdot \sin(\omega t - 0,56)}}$$

(b) Phasenverschiebung in Grad

$$\varphi \approx 0,56 \hat{=} \underline{\underline{32^\circ}}$$