Inverse Matrix

A quadratische, $\det A \neq 0$

Dann ex. Inverse A^{-1} von A mit $A^{-1}A = E$

<u>Bsp:</u>

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{II-I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)^{I-2II}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

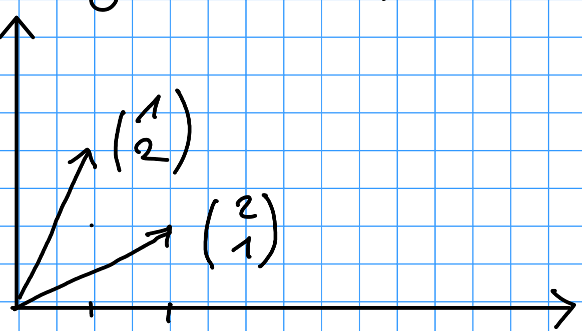
Probe $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

S.4.2 Vektorrechnung und analytische Geometrie

<u>Vektoren</u>: Vektoren sind $n \times 1$ Matrizen

<u>Bsp:</u> $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Falls ein KS gegeben ist haben wir folgende Anschauung eines Vektors als Pfeil.



Wichtig ist nur Länge und Richtung nicht Startpunkt

Schreibweise

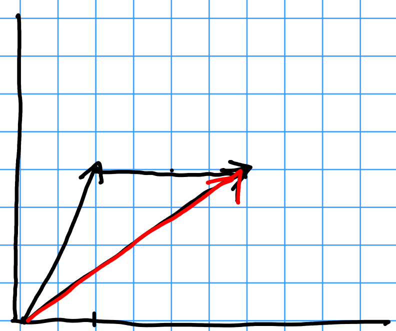
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 1, 2 sind Koordinaten des Vektors

<u>Vektoroperationen</u> wie bei Matrizen

<u>Skalierung:</u> $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\uparrow$
Skalar

<u>Addition</u> $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \\ 2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

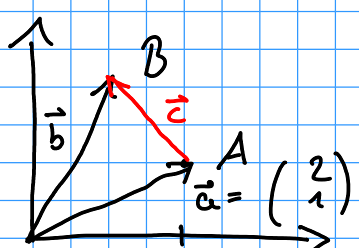


<u>Betrag</u> $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2}$

ist Länge des Vektors

<u>Punkte <-> Vektoren</u>

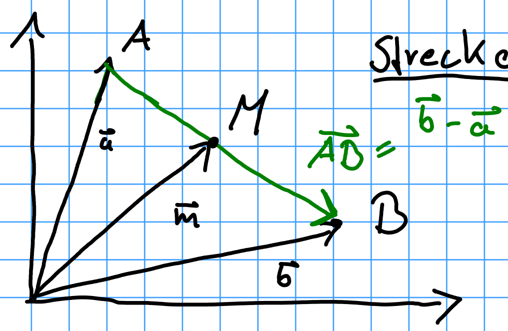
Punkte im Raum, Fläche sind gegeben durch Ortsvektoren im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$



Verschiebung $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{c}$

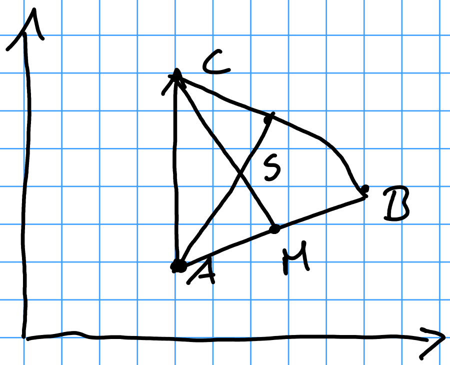
Erste Anwendungen

Streckenmittelpunkt



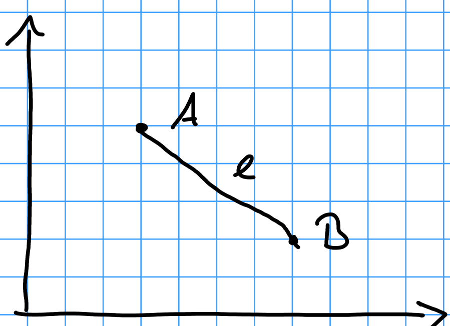
$$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$= \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$
$$= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

Schwerpunkt im Dreieck



$$\vec{s} = \vec{m} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$$
$$= \vec{m} + \frac{1}{3}\left(\vec{c} - \vec{m}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \frac{1}{3}\left(\vec{c} - \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$

Abstand



$$\ell = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}|$$

Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\ell = |\vec{b} - \vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|$$

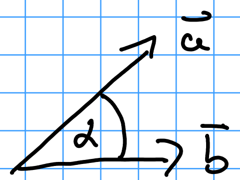
$$= \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Das Skalarprodukt

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

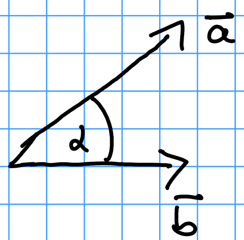
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3$$
$$= 0 + 2 + 3$$
$$= 5 \quad \text{ist Skalar}$$

im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

Bsp: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\alpha = \pi/4 \mathrel{\hat{=}} 45°$

$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

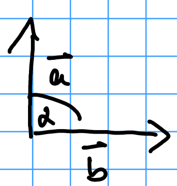
$|\vec{b}| = 1$

$|\vec{a}| = \sqrt{1+1}$
$= \sqrt{2}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \checkmark$$

Orthogonale Vektoren



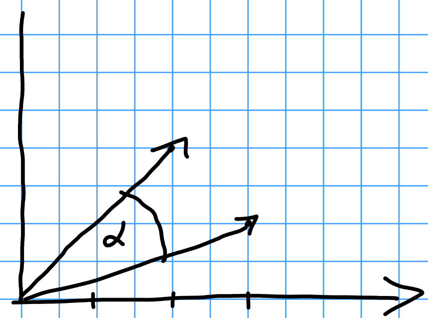
$\alpha = \pi/2 \mathrel{\hat{=}} 90°$ Dann $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) = 0$$

weil $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Winkelberechnung Bsp:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8 \overset{!}{=} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$= \sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 8 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{8} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{8}{\sqrt{80}} = \frac{8}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{20}} = \frac{8}{2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{5}}$$

$$= \frac{8}{4 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\underset{TR}{\Longrightarrow} \quad \alpha \approx \underline{\underline{26{,}57^\circ}}$$

Das Kreuzprodukt

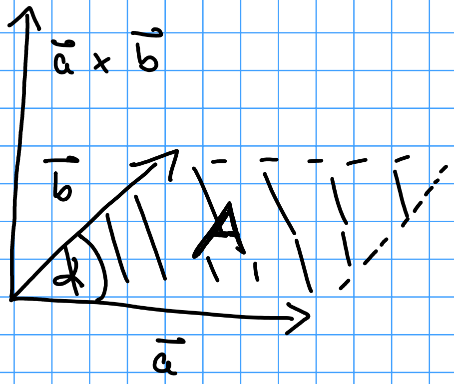
nur in $\mathbb{R}^3$

$$\overset{\vec{a}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \times \overset{\vec{b}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & & 1 \\ 1 & & 5 \end{matrix}$$



Flächeninhalt A

Eigenschaften:

(1) $\vec{a} \times \vec{b} \perp a$

$\vec{a} \times \vec{b} \perp b$

rechte Hand Regel

$\vec{a}$ Daumen

$\vec{b}$ Zeigefinger

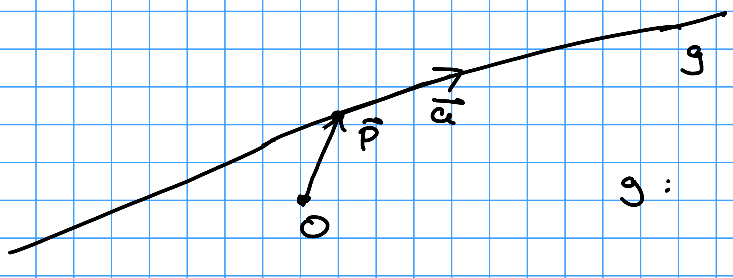
$\vec{a} \times \vec{b}$ Mittelfinger

(2) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha) = A$

(3) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

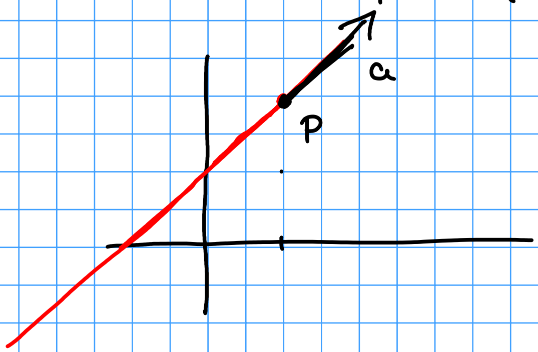
Weitere Anwendungen

① Geraden def.

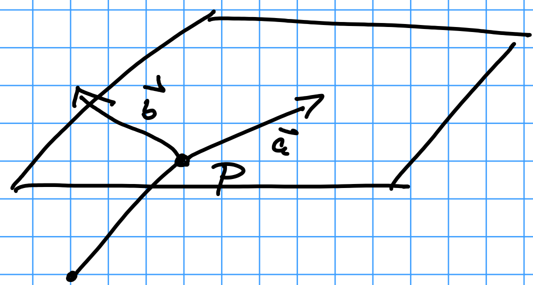


$$g: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{a}$$
$$\lambda \in \mathbb{R}$$

z.B. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



② Ebenen def.

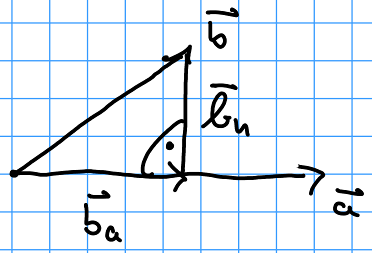


$$E: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebene in Höhe 2

orthogale Projektion



$\vec{b_n} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{b_n} \cdot \vec{a} = 0$

$\vec{b} = \vec{b_a} + \vec{b_n}$

$\vec{b_a} = \lambda \cdot \vec{a}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot (\vec{b_a} + \vec{b_n}) = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{a} + \vec{b_n})$$
$$= \lambda \cdot \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{a})}_{|\vec{a}|^2} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b_n}}_{=0} = \lambda \cdot |\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \qquad \Rightarrow \vec{b_a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

Abstände

$\vec{Q}$ zu $g: \vec{x} = p + \lambda \vec{a}$

① $$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{q} - \vec{p})|}{|\vec{a}|}$$

② Abstand Q zu $E: \vec{x} = p + \lambda \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

$$d = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{q} - \vec{p})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$