Aufgaben Differentialrechnung

Aufgabe 1 Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f(x) = 3x^6 + \frac{1}{2}x^2 + x + 8$

(b) $f(x) = \sin(x)x + 2x$.

(c) $f(x) = (x+1)^{12}$.

(d) $f(x) = \cos(3x)$

(e) $f(x) = e^{x^2+3x}$.

(f) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Aufgabe 2 Entscheiden Sie ob folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) Ist für ein Auto $s(t)$ die Funktion der zurückgelegten Strecke nach t Sekunden in Metern, dann ist $s'(t)$ die Geschwindigkeit nach t Sekunden in m/s.

(ii) Jede Funktion hat mindestens einen Extremwert.

(iii) Wenn eine Funktion ein lokales Maximum hat, muss sie auch ein lokales Minimum haben.

(iv) Eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die überall eine positive Ableitung hat, hat höchstens eine Nullstelle.

(v) Bei einer stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die überall eine Ableitung hat liegt zwischen zwei Nullstellen immer eine Extremstelle.

(vi) Sei $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x)$ das Taylorpolynom $T_{a=2,2}(x)$. Dann ist $g''(2) = \frac{1}{4}$.

(vii) Eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$, die überall eine negative Ableitung hat, hat genau eine Nullstelle.

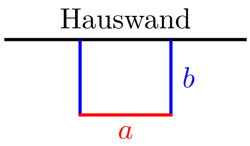
(viii) Für einen Pool mit Beckengröße 10m^2 sei $f(t)$ der Füllstand in Meter zur Zeit t in Minuten. Das Wasser des Pools wird abgesaugt mit einer Pumpe deren Pumpleistung in m^3/min durch die Funktion $p(t)$ gegeben ist. Dann gilt $f'(t) = -p(t) \cdot 10$.

Aufgabe 3

(i) Geben Sie für die Funktion $f(x) = x^2 - 3x + 7$ die Gleichung der Tangente im Punkt $(2, 5)$ an.

(ii) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ die Taylorentwicklung der Ordnung 2 um den Entwicklungspunkt $a = 1$.

Aufgabe 4 Ein Zaun soll gebaut werden, der eine rechteckige Fläche umschließt. Es stehen 60m Zaun zur Verfügung. An einer Seite soll die Fläche durch eine Hauswand begrenzt sein. Wie sind die Seitenlängen a und b des umschlossenen Rechtecks zu wählen damit der Flächeninhalt $a \cdot b$ maximal wird.



Aufgabe 5 Bestimmen Sie alle Extremwerte folgender Funktionen und untersuchen Sie jeweils ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt:

(a) $f(x) = x^4 - 2x^2$.

(b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$.

(c) e^{-x^2-2x+1}

Aufgabe 6 Führen Sie eine Kurvendiskussion durch und skizzieren Sie folgende Funktionen:

(a) $x^3 - 6x^2 + 8x$.

(b) $\frac{x^2}{x+1}$.

(c) $(x+1) \cdot e^{-x}$.