Wdh:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Häufig

Bsp: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

K1.5 Summen und Potenzen

Summennotation

Endindex

$$\sum_{k=3}^{6} \frac{k+1}{2k} = \frac{3+1}{2\cdot 3} + \frac{4+1}{2\cdot 4} + \frac{5+1}{2\cdot 5} + \frac{6+1}{2\cdot 6}$$

Laufindex

Startindex

$$= \frac{4}{6} + \frac{5}{8} + \frac{6}{10} + \frac{7}{12}$$

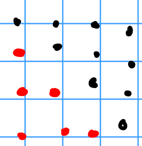
Bekannte Summen

(1) $$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$$

$$= \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$\boxed{\text{(Gauß'sche Summe)}}$

z.B. $$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100\cdot 101}{2} = 50\cdot 101 = 5050$$



(2) $$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q^1 + q^2 + \ldots + q^n$$

(geometrische Summe)

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

z.B. $$\sum_{k=0}^{63} 2^k = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63}$$

$$= \frac{1-2^{64}}{1-2} = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64}-1 \approx 18{,}4\cdot 10^{18}$$

Potenzen

Basis, Exponent

Bsp: $3^5 = \underline{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3^{-5}}$

$3^{-4} = \frac{1}{3^4}$ $\qquad \frac{1}{3^{-4}} = 3^4$

Rechenregeln

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\ \bullet\ a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \end{array}}$$

Bsp: $3^5 \cdot 3^4 = 3^{5+4}$

Bsp $3^5 \cdot 7^5 = (3 \cdot 7)^5$

Vorsicht! $(3+7)^5 \neq 3^5 + 7^5$

- $\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$

Bsp: $(3^5)^7 = 3^{5 \cdot 7}$

- $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

Bsp: $\frac{3^2}{7^2} = \left(\frac{3}{7}\right)^2$

Bsp: (1) $\frac{3^5}{3^7} = 3^5 \cdot 3^{-7} = 3^{5-7} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$

(2) $\frac{a^2 \cdot b^3 \cdot 3^2 \cdot c^{-2}}{a^{-1} \cdot c \cdot b^2 \cdot 3} = a^2 \cdot b^3 \cdot 3^2 \cdot c^{-2} \cdot a^1 \cdot c^{-1} \cdot b^{-2} \cdot 3^{-1}$

$= a^2 \cdot a^1 \cdot b^3 \cdot b^{-2} \cdot 3^2 \cdot 3^{-1} \cdot c^{-2} \cdot c^{-1}$

$= a^{2+1} \cdot b^{3-2} \cdot 3^{2-1} \cdot c^{-2-1} = a^3 \cdot b^1 \cdot 3^1 \cdot c^{-3}$

$= \frac{3a^3 b}{c^3}$

(3) Sonnenintensität $1361 \frac{W}{m^2} \approx 1{,}3 \cdot 10^3 \frac{W}{m^2}$

$= 1300 \frac{W}{m^2}$

$1 m^2 = 100 \cdot 100 \, cm^2 = 10^4 cm^2$

$1 W = 1000 \, mW = 10^3 mW$

also $1{,}3 \cdot 10^3 \, W/m^2 = 1{,}3 \cdot 10^3 \frac{10^3 mW}{10^4 cm^2}$

$= 1{,}3 \cdot 10^3 \cdot \frac{10^3}{10^4} \frac{mW}{cm^2}$

$= 1{,}3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} \frac{mW}{cm^2}$

$= 1{,}3 \cdot 10^{3+3-4} \frac{mW}{cm^2}$

$= 1{,}3 \cdot 10^2 \frac{mW}{cm^2} = 130 \frac{mW}{cm^2}$

3 LED

$7 \cdot 10^{-4} = 0{,}\underbrace{0007}$

$7 \cdot 10^4 = 7\underbrace{0000}$

Wurzeln

$b = \sqrt[5]{7} \iff b^5 = 7$

„5. Wurzel von 7"

2. Wurzel ist Quadratwurzel

$b = \sqrt{7} \iff b^2 = 7$ Bsp $\sqrt{9} = 3$

weil $3^2 = 9$

Potenzschreibweise

$5^{1/7} = \sqrt[7]{5}$, $5^{3/7} = 5^{3 \cdot \frac{1}{7}} = (5^3)^{1/7}$

$= \sqrt[7]{5^3}$

Rechenregeln

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}\left(= 5^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{1/2} = (5\cdot 7)^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{5\cdot 7}$$

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \left(\frac{5}{7}\right)^{1/2} = \frac{5^{1/2}}{7^{1/2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

Vorsicht $\sqrt{2+3} \neq \sqrt{2}+\sqrt{3}$

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt[k]{a}\cdot\sqrt[k]{b} &= \sqrt[k]{a\cdot b} \\ \sqrt[k]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}} \end{aligned}}$$

K2 Analysis

K2.1 Reelle Funktionen

Was ist eine Funktion?

$$\text{Input} \xrightarrow{\text{Funktion}} \text{Output}$$

Eine <u>reelle Funktion</u> $f: D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}$

D_f: Def. bereich, $\mathbb{R}$: Bildbereich

ist eine Zuordnung / Abbildung bei der jede Zahl $x \in D_f$ genau eine Zahl $y = f(x)$ zugeordnet ist.

Bsp: ① $f: \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$ $\quad W_f = \{5,-3,100\}$

mit $1 \mapsto 5$, $2 \mapsto -3$, $3 \mapsto 100$

Also $f(1) = 5,\ f(2) = -3,\ f(3) = 100$

② $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad D_g = \mathbb{R}$

$x \mapsto 2\cdot x - 1$

z.B $g(1) = 2\cdot 1 - 1 = 1$

$g(6) = 2\cdot 6 - 1 = 11$

$c = g(x) = 2x - 1$

$\Leftrightarrow c + 1 = 2x$

$\Leftrightarrow \frac{c+1}{2} = x$

$W_f = \mathbb{R}$

③ $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad D_h = \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$

z.B.

$g(-2) = (-2)^2 = 4$

$g(2) = 2^2 = 4$

$W_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

Wertebereich

Ist $f: D_f \to \mathbb{R}$ eine Funktion

dann heißt $W_f := \{ f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \}$

Wertebereich von f

Einschub Intervalle

$[2,5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$

$[2,5[\; = [2,5) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$

$]2,5] = (2,5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$

$]2,5[\; = (2,5) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

$(-\infty, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$

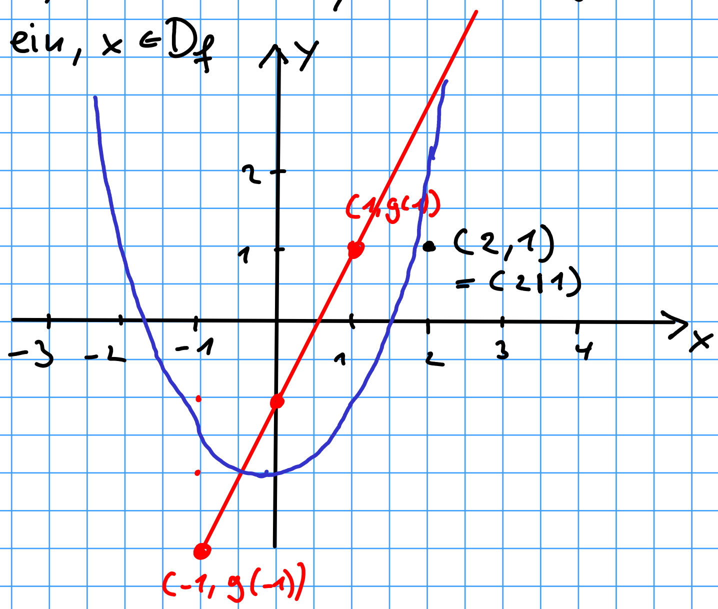
$[5, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x\}$

Graphen / Schaubilder

In einem x,y-Koordinatensystem tragen wir die Punkte $(x, f(x))$ ein, $x \in D_f$

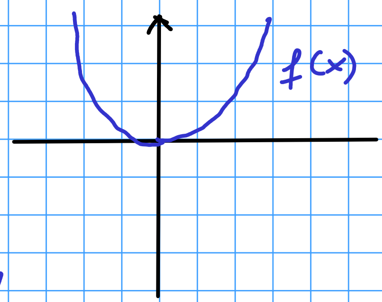
① $g(x) = 2x - 1$

② $h(x) = x^2 - 2$

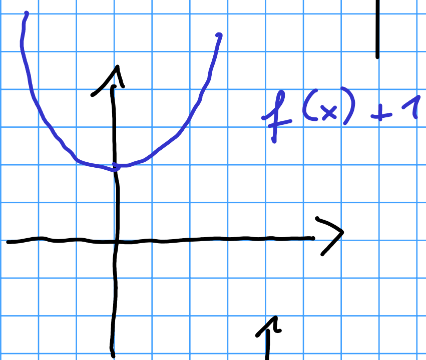


Graphentransformationen

$f(x) = x^2$ (gemeint $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$)

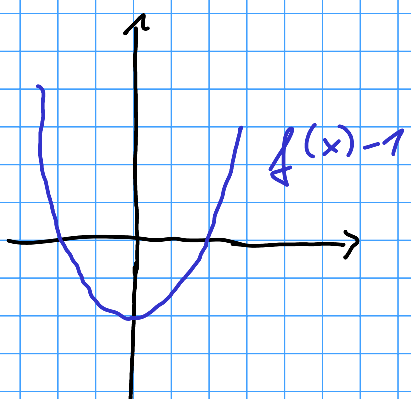


$g(x) = f(x) + 1 = x^2 + 1$



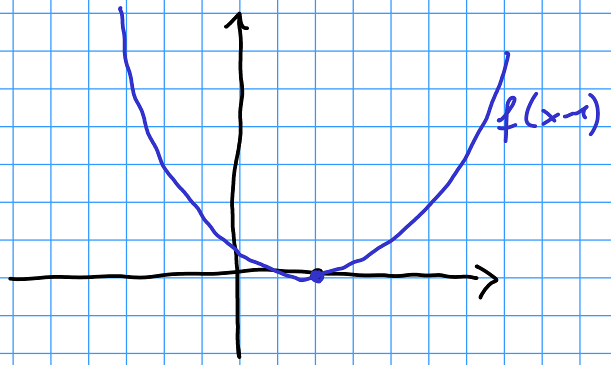
Verschiebung nach oben

$g(x) = f(x) - 1 = x^2 - 1$



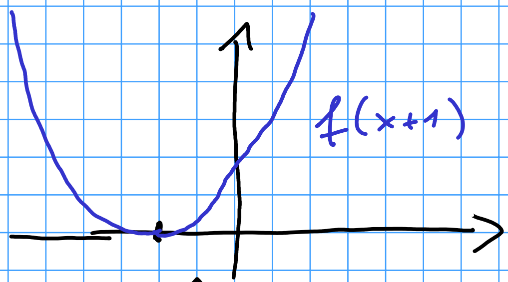
Verschiebung nach unten

$f(x-1) = (x-1)^2$



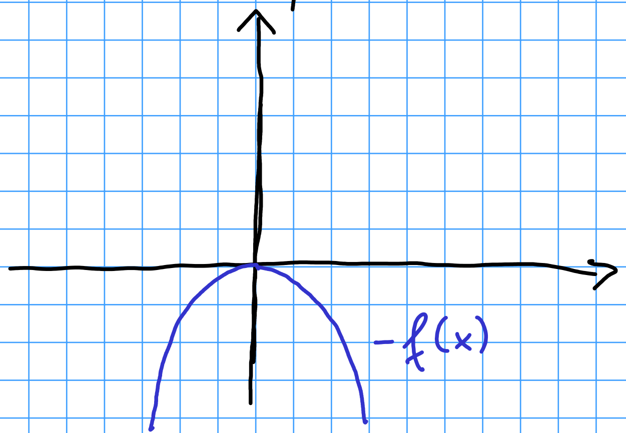
Verschiebung nach rechts

$f(x+1) = (x+1)^2$



Verschiebung nach links

$-f(x) = -x^2$

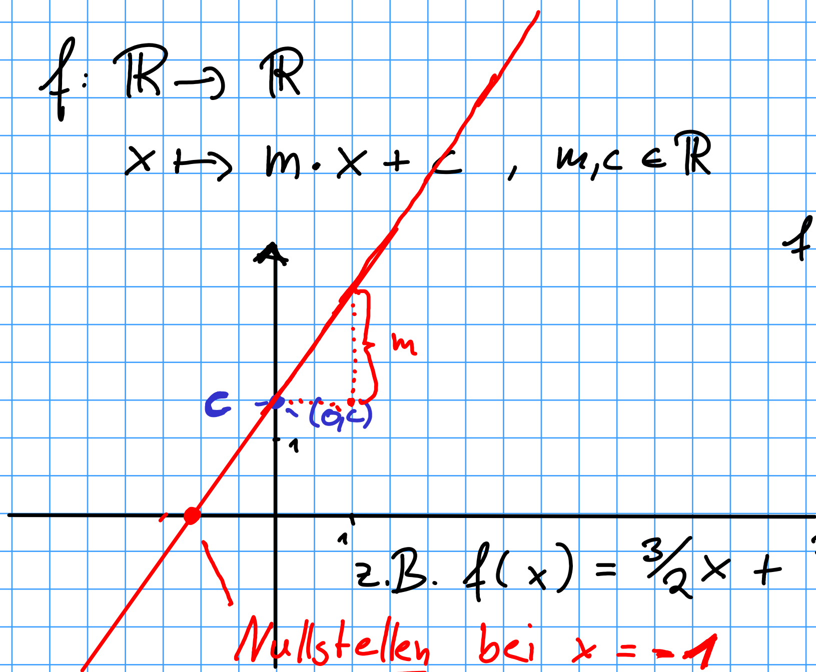


Spiegelung an x-Achse

K2.2 Bekannte Funktionen und Eigenschaften von Funktionen

① Lineare Fkt.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto m \cdot x + c \quad , \; m, c \in \mathbb{R}$$



$f(0) = c =$ y-Achsenabschnitt

$m =$ Steigung

$$W_f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } m \neq 0 \\ \{c\} & \text{falls } m = 0 \end{cases}$$

z.B. $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

Nullstellen bei $x = -1$

$f(-1) = 0$

$NS = (-1, 0)$

(2) Normalparabel

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$

$W_f = [0, \infty)$

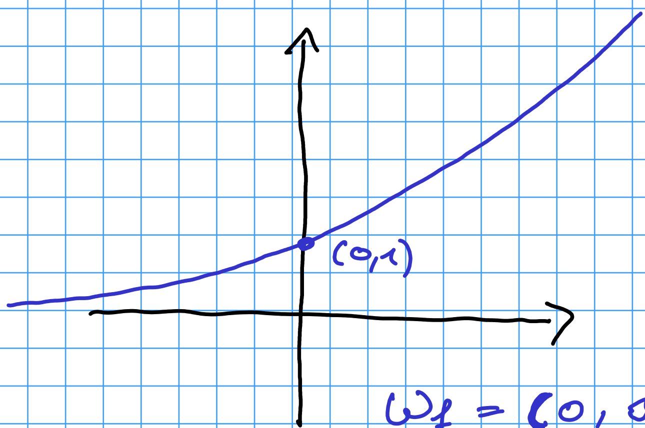
(3) Exponentialfkt.

(3) Exponentialfkt.

$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto e^x$

$e =$ Eulersche Zahl $\approx 2{,}71$



$W_f = (0, \infty)$

exp ist <u>monoton</u> <u>steigend</u>

$x_1 \geq x_0 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_0)$

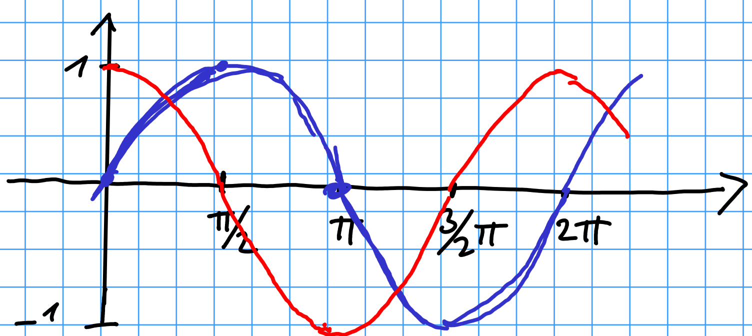
(4) Sinusfunktion / Kosinusfkt.

$\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sin(x)$

$\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \cos(x)$



Nst von sin

$x = \ldots -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi \ldots$

$W_{\sin} = [-1, 1]$

$W_{\cos} = [-1, 1]$

4 Gebrochenrationale Fkt

$$f: D_f \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{N(x)}{Z(x)}$$

wobei $N(x)$, $Z(x)$ Polynome

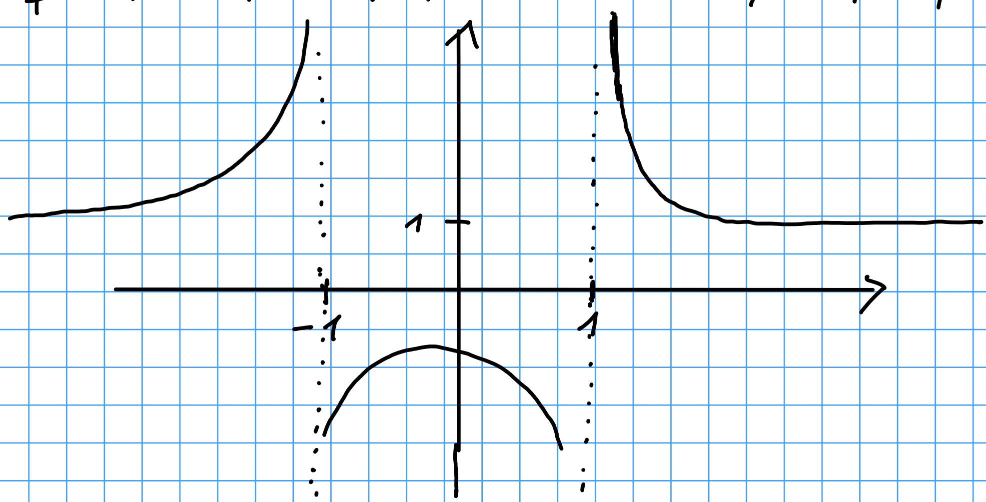
$$Z(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} x^{n-1} + .. + a_0$$
$$N(x) = a_m \cdot x^m + \; .. \; + a_m$$

z.B. $Z(x) = x + 2$

$$N(x) = x^2 - 1 = (x-1) \cdot (x+1)$$

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}$$

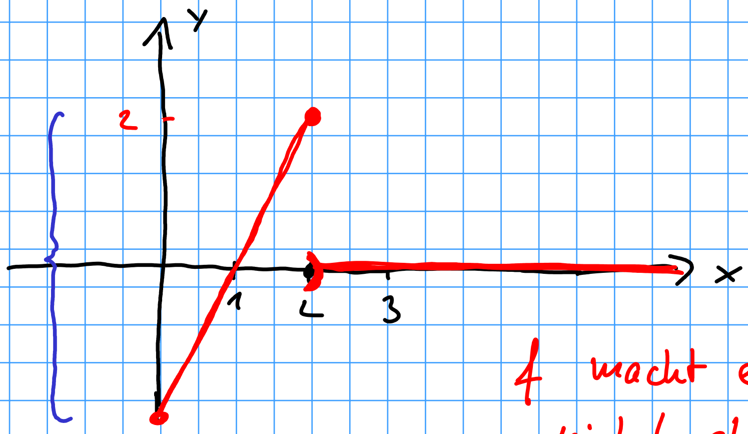
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$



⑤ Stückweise def. Funktionen

$$f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 2x-2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$$



$W_f = [-2, 2]$

f macht einen Sprung

nicht stetig