Aufgaben Gleichungen

Aufgabe 1

(a) $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 4}$

f hat Nullstelle x, falls $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 4} = 0$.

Dafür muss der Zähler $= 0$ sein $\iff x^2 + 5x - 6 = 0$

Also mit Mitternachtsformel

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\iff \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$= -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} = -\frac{12}{2}, \frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -6, \quad x_2 = 1$$

Also sind $x_1 = -6$ und $x_2 = 1$ die Nst. von f.

Probe $\quad f(x_1) = \frac{(-6)^2 + 5 \cdot (-6) - 6}{(-6)^2 + 4} = \frac{36 - 30 - 6}{36 + 4} = \frac{0}{40} = 0 \checkmark$

$$f(x_2) = \frac{1^2 + 5 \cdot 1 - 6}{1^2 + 4} = \frac{6 - 6}{5} = 0 \checkmark$$

(b) $f(x) = x+5$
$g(x) = 3x-5$

Die Graphen von f und g scheiden sich bei x_s, falls

$$f(x_s) = g(x_s)$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_s + 5 = 3x_s - 5 \quad | -x_s$$
$$\Longleftrightarrow \quad 5 = 2x_s - 5 \quad | +5$$
$$\Longleftrightarrow \quad 10 = 2x_s \quad | \cdot \tfrac{1}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \quad x_s = 5$$

Der Schnittd punk isd also bei $x_s = 5$
und $y = f(x_s) = 5+5 = 10$

Probe $g(x_s) = 3 \cdot 5 - 5 = 10$ ✓

(c) $f(x) = 3 \cdot x + c$ hat die Nullstelle $x_0 = 5$

Das heißt $f(x_0) = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad 3 \cdot x_0 + c = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad 3 \cdot 5 + c = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad 15 + c = 0 \quad | -15$$
$$\Longleftrightarrow \quad c = -15$$

Also hat die Funktion f für $c = -15$ die Nst. $x_0 = 5$

$$\boxed{f(x) = 3x - 15}$$

(d) $f(x) = x^2 + 5x - 1$

$g(x) = 5x + 3$

f und g schneiden sich bei x_s, falls

$$f(x_s) = g(x_s)$$

$\iff \quad x_s^2 + 5 \cdot x_s - 1 = 5 \cdot x_s + 3 \quad | -5x_s$

$\iff \quad x_s^2 - 1 = 3 \quad | +1$

$\iff \quad x_s^2 = 4$

$\iff \quad x_{s_1} = 2$ oder $x_{s_2} = -2$

<u>y-Koordinaten</u>

$f(x_{s_1}) = 2^2 + 5 \cdot 2 - 1 = 13$ Probe $g(x_{s_1}) = 5 \cdot 2 + 3 = 13$ ✓

$f(x_{s_2}) = (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 1 = -7$ Probe $g(x_{s_2}) = 5 \cdot (-2) + 3 = -7$ ✓

Das heißt f und g haben die Schnittpunkte

$S_1 = (2, 13)$ und $S_2 = (-2, -7)$

Aufgabe 4

Def. bereich von $2(x-2)$ ist $\mathbb{R}$
Def bereich von $3(x+1)$ ist $\mathbb{R}$

(i) $2(x-2) = 3(x+1)$,

Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2x - 4 = 3x + 3 \quad | -2x - 3$

$\Leftrightarrow -7 = x$

Lösungsmenge $L = \{-7\}$

(ii) $(x-2)\cdot(x-1) = 0$, $D = \mathbb{R}$

$L = \{2, 1\}$

(iii) $2x^2 + 18x + 10 = 6x$, $D = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{2\cdot 2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{64}}{2\cdot 2}$

$= \dfrac{-12 \pm 8}{4} = -3 \pm 2 = -5 / -1$

$L = \{-5, -1\}$

(IV) $(x^2 - 1)(x^2 + 3x) = 0$ $D = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$ oder $x^2 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$ oder $x\cdot(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ oder $x = -1$ oder $x = 0$ oder $x = -3$

$L = \{-1, 1, 0, -3\}$

(V) $\dfrac{3x}{x-2} = \dfrac{2x+7}{x+3} + \dfrac{6}{x-2} \quad | \cdot (x-2)$

Def. bereich von $\dfrac{3x}{x-2}$ ist $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Def. bereich von $\dfrac{2x+7}{x+3} + \dfrac{6}{x-2}$ ist $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x}{x-2} = \dfrac{(2x+7)(x-2) + 6\cdot(x+3)}{(x+3)(x-2)}$

$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\} \cap \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3x}{x-2} = \frac{2x^2-4x+7x-14+6x+18}{(x+3)(x-2)} \quad \Big| \cdot (x-2)\cdot(x+3)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x\cdot(x+3) = 2x^2+9x+4$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2+9x = 2x^2+9x+4 \quad \big| -9x-2x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x=2 \text{ oder } x=-2 \qquad 2\notin D \text{ also } \mathbb{L}=\{-2\}$$

(vi) $1-\sqrt{2x-3} = x$ $\qquad D = \mathbb{R}\setminus(-\infty, 3/2)$

$= [3/2, \infty)$

$$\Leftrightarrow \quad 1-x = \sqrt{2x-3} \qquad (\;)^2$$ „keine Äquivalenzumformung" (*)

$$\Rightarrow \quad (1-x)^2 = 2x-3$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-2x+x^2 = 2x-3 \quad \big| -2x+3$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-4x+4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2} = \frac{4\pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 0$$

Probe: $1-\sqrt{2\cdot2-3} = 1-\sqrt{1} = 0 \neq 2$

Also 2 keine Lsg. der Gleichung. (Dazugekommen in (*))

$\Rightarrow$ Lösungsmenge $L = \{\} = \emptyset$ leere Menge

(VII) $\frac{-3}{x-4} = x \quad | \cdot (x-4)$ $\qquad \frac{-3}{x-4}$ ist def auf $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

x ist def. auf $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$

$-3 = x(x-4)$ $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$\Leftrightarrow -3 = x^2 - 4x$

$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x + 3$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = 2 \pm 1$

$\Leftrightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3 \quad , \quad x_1, x_2 \in \mathbb{D} \qquad \mathbb{L} = \{1, 3\}$