Mathe Intensivkurs

marc.diesse@fu-berlin.de

Literatur: „Brücken zur Mathematik", Hohloch, Kümmerer, Gilg

K1 Mathematik Grundlagen

K1.1 Notationen und Zahlenmengen

Aussagenlogik

„$\Rightarrow$" : „daraus folgt" $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

„$\Leftrightarrow$" : „genau dann wenn" $x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5$

Mengen (Def):

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten, den Elemente der Menge

Bsp: $M = \{\text{rot}, \text{schwarz}, \text{Apfel}\} = \{\text{Apfel}, \text{schwarz}, \text{rot}\}$

$M = \{2, 3, 5\ 8\}$

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen

$\uparrow$ Definition

Mengenoperationen

1. $m \in M$ „ist Element von"   z.B. $3 \in \{2, 3, 5\}$

   $4 \notin \{2, 3, 5\}$

2. $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\}$

   $= \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ (Bedingungsnotation)

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n < 6\} = \{3, 4, 5\}$

③ $\emptyset = \{\}$ leere Menge

④ $M \subseteq N$ Teilmenge $\{2,3\} \subseteq \{2,3,5\}$

⑤ $M \setminus N$ ohne $\{2,3,6,7\} \setminus \{3,6,8\}$
$= \{2,7\}$

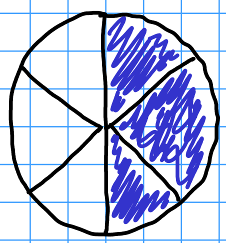
⑥ Vereinigung „$\cup$", Schnitt „$\cap$" $\{2,3\} \cup \{3,5\} = \{2,3,5\}$
$\{2,3\} \cap \{3,5\} = \{3\}$

Zahlenmengen

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ = natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$ = ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{ p/q \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$ = rationale Zahlen (Brüche)
- $\mathbb{R}$ = reelle Zahlen (= alle Zahlen)
  rationale $\cup$ irrationale Zahlen $\sqrt{2}, \pi, e, \ldots$
- $\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \}$ Komplexe Zahlen

K1.2 Bruchzahlen (rationale Zahlen) $\mathbb{Q}$

Bsp: $\frac{3}{6}$ Zähler (numerator) / Nenner (denominator) $= 3 : 6$



$= \frac{1}{2}$

Erweitern / Kürzen

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} \quad (\text{s.o}) \quad \text{„Erweitern"}$$

Andersrum

$$\frac{6}{8} = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{4 \cdot \cancel{2}} = \frac{3}{4}$$

Rechenoperationen

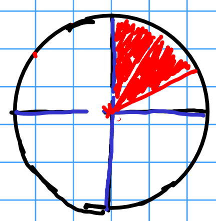
Mal „·"

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12}$$

$$= \frac{1 \cdot \cancel{2}}{6 \cdot \cancel{2}} = \frac{1}{6}$$

Anschaulich: Mal bedeutet „von"

$\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{4}$



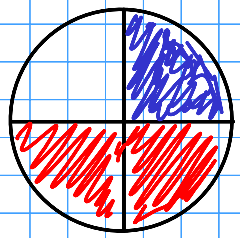
Prozent:

30% von 210

$$= \frac{30}{100} \cdot 210 = \frac{30 \cdot 210}{100}$$

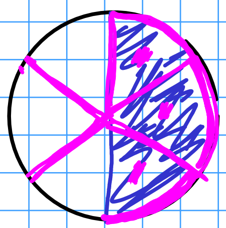
$$= 3 \cdot 21 = \underline{63}$$

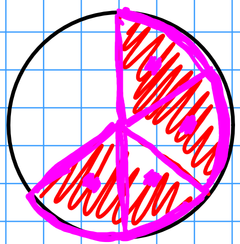
Plus „+" $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$



verschiedene Nenner $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6}$

$= \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}$





Nenner gleich machen:

einfach:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{1\cdot 9}{6\cdot 9} + \frac{1\cdot 6}{9\cdot 6}$$

$$= \frac{9+6}{6\cdot 9} = \frac{15}{54}$$

elegant:
Hauptnenner ist kgV

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{1\cdot 3}{6\cdot 3} + \frac{1\cdot 2}{9\cdot 2}$$

$$= \frac{3}{18} + \frac{2}{18} = \frac{3+2}{18} = \frac{5}{18}$$

$6 = 2\cdot 3$

$9 = 3\cdot 3$

$kgV = 2\cdot 3\cdot 3$

K1.3 Rechnen mit reellen Zahlen

- $\boxed{\text{Reihenfolge:}}$ Klammern vor Punkt vor Strich

$$2+3\cdot(1+2) = 2+3\cdot 3 = 2+9 = 11$$

- $\boxed{\text{Additives Inverse (Minus)}}$

$$2-3 := 2+(-3) = 2+(-1)\cdot 3$$

- $\boxed{\text{Assoziativgesetz}}$

$$(a+b)+u = a+(b+u)$$
$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(bc)$$

(Hinweis: Mit Variablen häufig $2\cdot a\cdot b = 2ab$)

Bsp:

1. $(5+2)+1 = 5+(2+1)$
2. $\underbrace{(2\cdot 3)\cdot 4}_{=6\cdot 4} = 2\cdot(3\cdot 4) = 2\cdot 12$
3. $3+5+7 = (3+5)+7$
4. $a\cdot b\cdot c = (a\cdot b)\cdot c$

- $\boxed{\text{Kommutativgesetz}}$

$$a+b = b+a$$

Bsp:
1. $2+3 = 3+2$
2. $2-3 \neq 3-2$ ⚡
3. $2-3 = 2+(-3) = -3+2$
4. $3a+5c-(3+8d)$
   $= a\cdot 3-(3+8d)+5c$
5. $2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}$
   $= \frac{2\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} = \frac{2\cdot 3\cdot 1}{5\cdot 3\cdot 1}$
   $= \frac{2}{5}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{1} = \frac{2}{5}\cdot 1\cdot 1$
   $= \frac{2}{5}$

• Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Bsp:

① $3 \cdot (2+5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5$

② $(a+b)(2a-b) = (a+b) \cdot 2a + (a+b) \cdot (-b)$

$= 2a^2 + 2ab + a(-b) - b^2$

$= 2a^2 + 2ab - ab + b^2 = 2a^2 + ab + b^2$

③ $2 - (3 + 2 - 7) = 2 + (-1) \cdot (3 + 2 - 7)$

$= 2 + (-3 - 2 + 7)$

$= \cancel{2} - 3 \cancel{- 2} + 7 = 4$

④ $(-2) \cdot (3 + 7) = -6 - 14 = -20$

1. Beispiel aufgabe (nicht vorgerechnet)

Folgen Term vereinfachen $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$4(3a - 2b + 2(b + 3a + c - 2(c + 2a - 3b)))$$

$\underset{\text{Distributivgesetz}}{=} 4(3a - 2b + 2(b + 3a + c + (-2)c + (-2) \cdot 2a + (-2) \cdot (-3b)))$

$= 4(3a - 2b + 2(b + 3a + c - 2c - 4a + 6b))$

$\underset{\text{komm gesetz}}{=} 4(3a - 2b + 2(\underbrace{3a - 4a} + \underbrace{b + 6b} + \underbrace{c - 2c}))$

$\underset{\text{Distributivgesetz}}{=} 4(3a - 2b + 2(a(3-4) + b(1+6) + c(1-2)))$

$= 4(3a - 2b + 2(a(-1) + b7 + c \cdot (-1)))$

$\underset{\text{Distributivgesetz}}{=} 4\,(3a - 2b + 2\cdot(-1)\cdot a + 2\cdot 7\cdot b + 2\cdot c\cdot(-1))$

$= 4\,(3a - 2b - 2a + 14b - 2c)$

$= 4\,(3a - 2a + 14b - 2b - 2c)$

$= 4\,(1a + 12b - 2c)$

$\underset{\text{Dist. gesetz}}{=} \underline{\underline{4a + 48b - 8c}}$

2. Beispielaufgabe (vorgerechnet)

(Hinweis: Mit Variablen häufig $2\cdot a\cdot b = 2ab$)

$4\,(3a - 2b + 2\,(b + 3a - 2\,(b + 3ab)))$

$= 4\,(3a - 2b + 2\,(b + 3a + (-2)\cdot b + (-2)\cdot 3ab)$

$= 4\,(3a \cancel{- 2b} + \cancel{2b} + 2\cdot 3\cdot a + 2\cdot(-2\cdot b)$
$+ 2\cdot(-6\cdot a\cdot b))$

$= 4\,(3\cdot a + 6\cdot a - 4\cdot b - 12ab)$

$= 12a + 24a - 16b - 48ab$

$= a\,(12 + 24) - 16b - 48ab = 36a - 16b - 48ab$

K1.4 Binomische Formeln

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b$
  $= a^2 + ba + ab + b^2 = \underline{a^2 + 2ab + b^2}$

- $(a-b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$
  $= a^2 - 2ab + b^2$

- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Bsp.: • $(2x+3y)^2 = 4x^2 + 2\cdot 2\cdot 3\cdot x\cdot y + 9y^2$
$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

- $(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$
  $= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$
  $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

- $(x^4 - y^4) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$